

מבחן סיום במתמטיקה

קורס קדם במתמטיקה שנה"ל: תשע"ט, מועד א'

תאריך: 26.08.2018

המרצה: ד"ר יעקב רוזניק

הוראות לנבחן:

1. נא לכתוב בעט, בצבע שחור וכחול בלבד, בכתב ברור ונקי.
2. משך המבחן 3 שעות.
3. תשובה על כל שאלה יש להתחיל בדף חדש
4. חומר עזר מותר: מחשבון (לא גרפי)
5. אסור להוציא את טופס המבחן

בהצלחה !

שמירה על טוהר הבחינות

- הלימודים במרכז האקדמי רופין מבוססים על אמון בין הסטודנטים לבין המוסד על סגל מוריו ועובדיו. הסטודנטים מצופים להתנהגות ההולמת את כבוד המרכז כמוסד אקדמי ואת מעמדם כסטודנטים. ידוע לי כי העבירות שלהלן הן עבירות משמעת:
1. הכנסת חומר עזר אסור לבחינה או החזקתו בעת הבחינה.
 2. התקשרות או ניסיון התקשרות בין בכתב ובין בדרך אחרת עם נבחן אחר או גורם חוץ, בעת בחינה.
 3. הכנסת שינוי כלשהו בבחינה לאחר תום מועד הבחינה או בשעת עיון בה לאחר מתן ההערכה.

הנני מתחייב/ת לעבודה עצמאית בבחינה.

ת"ז לשם אישור

מבחן סיום במתמטיקה (פתרון)

1) א. (15 נק') הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$$

פתרון

$$a) n=1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = (1-1)2^1 + 1$$

$$b) n=k \Rightarrow 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + k \cdot 2^{k-1} = (k-1)2^k + 1 \quad \text{נניח:}$$

$$c) n=k+1 \Rightarrow 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + k \cdot 2^{k-1} + (k+1)2^k = k2^{k+1} + 1 \quad \text{צריך להוכיח:}$$

הוכחה:

$$d) 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + k \cdot 2^{k-1} + (k+1)2^k = (k-1)2^k + 1 + (k+1)2^k = 2^k(k-1+k+1) + 1 = 2^k \cdot 2k + 1 = k \cdot 2^{k+1} + 1$$

ב. (10 נק') פתור את המשוואה הנתונה (הצג את הפתרון בצורה אלגברית ובצורה טריגונומטרית):

$$|z| + \bar{z} + 8i = 5 + z$$

פתרון

$$|z| + \bar{z} + 8i = 5 + z \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + (x - iy) + 8i = 5 + (x + iy) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + x = 5 + x \\ -y + 8 = y \end{cases} \Rightarrow y = 4$$

$$\sqrt{x^2 + 16} = 5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{z_1 = 3 + 4i}, \boxed{z_2 = -3 + 4i} \Rightarrow |z_{1,2}| = \sqrt{25} = 5,$$

$$\arg z_{1,2} = \arctan \frac{4}{\pm 3} = \pm 53.13^\circ, \quad \boxed{z_1 = 5(\cos 53.13^\circ + i \sin 53.13^\circ)},$$

$$\boxed{z_2 = 5(\cos 126.87^\circ + i \sin 126.87^\circ)}$$

2) א. (15 נק') פתור את המשוואה $1 - \sin 2x = \sin^2 x$

פתרון

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x \Rightarrow (1 - \sin^2 x) - \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 2 \sin x) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 180^\circ k}, \quad \cos x - 2 \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 2 \sin x \Rightarrow$$

$$\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arctan 0.5 + 180^\circ k \Rightarrow \boxed{x = 26.57^\circ + 180^\circ k}$$

2.ב. (5 נק') מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{16}{\pi} x^2 \sin 2x$ בנקודה $x = \frac{\pi}{4}$.

פתרון

$$y = \frac{16}{\pi} x^2 \sin 2x, \quad x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{16}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot 1 = \pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \pi \right)$$

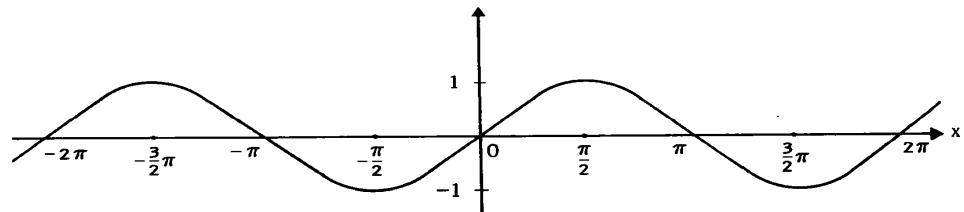
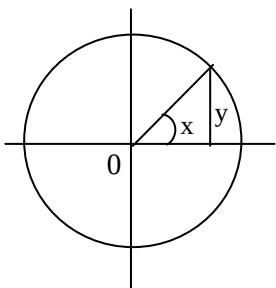
$$y' = \frac{16}{\pi} (2x \sin 2x + x^2 \cdot 2 \cos 2x), \quad m = y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{16}{\pi} \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \frac{\pi^2}{16} \cdot 2 \cdot 0 \right) = 8 \Rightarrow$$

$$y - \pi = 8 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \boxed{y = 8x - \pi}$$

ג. (5 נק') הפונקציה $y = \sin x$: הגדרה באמצעות המעגל הטריגונומטרי, תכונות וגרף הפונקציה.

פתרון

פונקציה מחזורית, מחזור הפונקציה שווה ל- 360° . פונקציה אי-זוגית. תחום ההגדרה $-\infty < x < \infty$, תחום ההשתנות של y : $-1 \leq y \leq 1$,



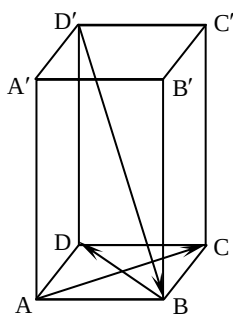
3.א. (15 נק') מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \sqrt{\log(x^2 + 1) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5 - |x|}}$.

פתרון

$$y = \sqrt{\log(x^2 + 1) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5 - |x|}} \Rightarrow \text{נרשום את מערכת האי שוויונים (מערכת מהסוג וגם)}$$

$$\begin{cases} \log(x^2 + 1) - 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ 5 - |x| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x^2 + 1) \geq \log 10 \\ x^2 + 1 > 0 \\ 5 - |x| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 10 \\ -\infty < x < \infty \\ |x| < 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ -\infty < x < \infty \\ -5 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 3) \geq 0 \\ -\infty < x < \infty \\ -5 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-5 < x \leq -3} \text{ או } \boxed{3 \leq x < 5}$$



3) ב. (10 נק') במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתונים הווקטורים:

$$\overrightarrow{AC} = (7, -2, -6), \quad \overrightarrow{BD} = (-3, -6, 8), \quad \overrightarrow{D'B} = (3, 5, -6)$$

(a) מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$.

(b) מצא את הזווית שיוצר הווקטור $\overrightarrow{AD'}$ עם הצירים.

(c) מצא את הזווית בין הווקטורים $\overrightarrow{D'B}$ ו- $\overrightarrow{D'C'}$.

פתרון

אלכסונים במקבילית $ABCD$ חוצים זה את זה לכן

$$a) \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}] = \frac{1}{2} [(7, -2, -6) - (-3, -6, 8)] = \boxed{(5, 2, -7)}$$

כדי למצוא את הזווית שיוצר הווקטור $\overrightarrow{AD'}$ עם הצירים נמצא את וקטור היחידה $\overrightarrow{AD'^0}$ של הווקטור $\overrightarrow{AD'}$ ונשתמש בכך שקואורדינטות של וקטור יחידה הן קוסינוסי הכיוון של הווקטור, כלומר קוסינוסים של הזווית שיוצר הווקטור עם הצירים. לכן

$$b) \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{D'B} = (5, 2, -7) - (3, 5, -6) = (2, -3, -1)$$

$$|\overrightarrow{AD'}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}, \quad \overrightarrow{AD'^0} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{14}} = \boxed{57.69^\circ}, \quad \beta = \boxed{143.3^\circ}, \quad \gamma = \boxed{105.48^\circ}$$

כדי למצוא זווית בין שני וקטורים נשתמש בהגדרה של מכפלה סקלרית ונמצא קודם את קוסינוס הזווית המבוקשת:

$$c) \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{AB} = (5, 2, -7) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 6}{\sqrt{25 + 4 + 49} \cdot \sqrt{9 + 25 + 36}} = 0.9067 \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \arccos 0.9067 = 24.94^\circ}$$

$$\frac{(\sqrt{x}+1)^{-1}}{\left(\frac{x^{1.5}-1}{x^{0.5}-1}+x^{0.5}\right)^{-1}}:\left(\frac{x^{0.5}-1}{x-1}\right)^{-1}=1$$

4 א. (15 נק') הוכח את הזהות

פתרון

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{x}+1)^{-1}}{\left(\frac{x^{1.5}-1}{x^{0.5}-1}+x^{0.5}\right)^{-1}}:\left(\frac{x^{0.5}-1}{x-1}\right)^{-1} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}{\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}\right)^{-1}}:\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)^{-1} = \left|\sqrt{x}=a\right|= \\ &= \frac{\frac{1}{a+1}}{\left(\frac{a^3-1}{a-1}+a\right)^{-1}}:\left(\frac{a-1}{a^2-1}\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{a+1}}{\left(\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a-1}+a\right)^{-1}}:\left(\frac{(a-1)}{(a+1)(a-1)}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{(a+1)(a^2+a+1+a)^{-1}}:\left(\frac{1}{a+1}\right)^{-1} = \frac{1}{(a+1)(a^2+2a+1)^{-1}}:(a+1)= \\ &= \frac{1}{(a+1)(a+1)^{-2}} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{1}{(a+1)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{(a+1)^2}} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a+1)} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

ב. (5 נק') חשב:

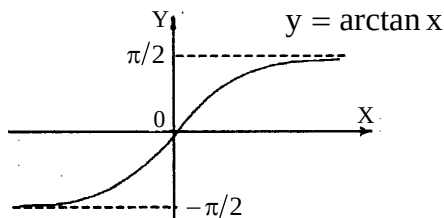
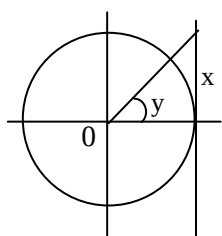
$$\text{a) } \int \frac{dx}{5-2x} \quad \text{b) } \int e^x (1+e^{3x}) dx \quad \text{c) } \int \sin x \cos x dx$$

פתרון

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{5-2x} &= \boxed{-\frac{1}{2} \ln |5-2x| + C} \\ \text{b) } \int e^x (1+e^{3x}) dx &= \int (e^x + e^{4x}) dx = \boxed{e^x + \frac{1}{4} e^{4x} + C} \\ \text{c) } \int \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \boxed{-\frac{1}{4} \cos 2x + C} \end{aligned}$$

ג. (5 נק') הפונקציה $y = \arctan x$: ההגדרה באמצעות המעגל הטריגונומטרי, תכונות וגרף הפונקציה.

פתרון



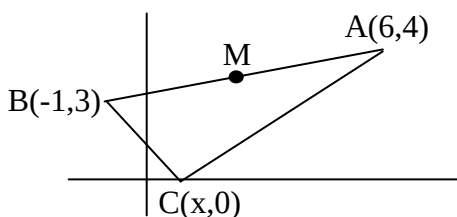
פונקציה אי-זוגית

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

5. א. (15 נק') הקדקוד C של משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) נמצא על ציר ה-X ושני הקדקודים האחרים הם $B(-1,3)$, $A(6,4)$.
 (a) מצא את קואורדינטות הקדקוד C.
 (b) מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABC.

פתרון



$$a) m_{BC} = \frac{0-3}{x+1} = -\frac{3}{x+1}, \quad m_{AC} = \frac{4-0}{6-x} = \frac{4}{6-x},$$

$$BC \perp AC \Rightarrow m_{BC} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow -\frac{3}{x+1} \cdot \frac{4}{6-x} = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3 \Rightarrow$$

$$\boxed{C(2,0), C(3,0)}$$

(b) הזווית הישרה C היא זווית היקפית והיא נשענת על קוטר המעגל AB. אם M הוא מרכז המעגל, אז MB הוא רדיוס המעגל. לכן

$$x_M = \frac{6-1}{2} = 2.5, \quad y_M = \frac{3+4}{2} = 3.5 \Rightarrow M(2.5, 3.5)$$

$$R^2 = MB^2 = (2.5+1)^2 + (3.5-3)^2 = 12.5 \Rightarrow \boxed{(x-2.5)^2 + (y-3.5)^2 = 12.5}$$

ב. (10 נק') פתור את המשוואה $(10x^2)^{3-\log x} = x^6$.

פתרון

$$(10x^2)^{3-\log x} = x^6 \Rightarrow (3-\log x) \log(10x^2) = 6 \log x \Rightarrow \log x = t \Rightarrow (3-t)(1+2t) = 6t \Rightarrow$$

$$-2t^2 + 5t + 3 = 6t \Rightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow t = 1, t = -3/2 \Rightarrow$$

$$\log x = 1 \Rightarrow \boxed{x=10}, \quad \log x = -3/2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{10\sqrt{10}}}$$