

מתמטיקה מבחן פטור לדוגמה

✓ מותר להשתמש במחשב כיס

✓ משך המבחן 3 שעות

הוראות לנבחן:

חלק א' (60 נקודות): בחלק הזה הנבחן חייב לענות על 4 שאלות מתוך 5 השאלות.

חלק ב' (40 נקודות): בחלק הזה הנבחן חייב לענות על 4 שאלות מתוך 5 השאלות.

בהצלחה !

חלק א' (40 נקודות)

ענה על 4 שאלות מתוך 5 השאלות הבאות (כל שאלה 10 נקודות):

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$y = (x^2 - 5x + 6)^{\sqrt{25-x^2}}$$

2. פשט את הביטוי:

$$\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2$$

3. עבור אילו ערכים של הפרמטר m יש למשוואה:

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1 = 0$$

שני שורשים מרוכבים ?

4. נתונה הקובייה $ABCD A'B'C'D'$.

(a) חשב את הזווית שבין האלכסון $D'B$ למישור הבסיס $ABCD$.

(b) חשב את הזווית שבין מישור המשולש $D'BC$ למישור הבסיס $ABCD$.

5. a) פתור את המשוואה :

$$2 \cos x \cdot \sin 2x = 3 \sin x$$

b) הגדר באמצעות המעגל הטריגונומטרי את הפונקציות: $y = \cos x$, $y = \tan x$ ושרטט את הגרפים שלהן.

חלק ב' (60 נקודות)

ענה על 4 שאלות מתוך 5 השאלות הבאות (כל שאלה 15 נקודות):

1. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1) \cdot 2n = \frac{n}{3}(n+1)(4n-1)$$

2. מצא את משוואת המשיק למעגל:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$$

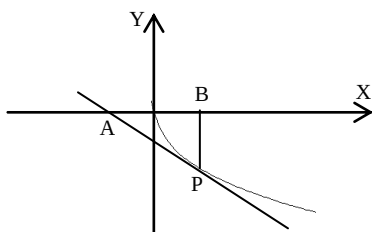
בנקודה $(2, 2)$.

3. a) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \ln^2 x^3$ בנקודה שבה $x = 1$.

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/8} \frac{dx}{\sin^2(\pi - 2x)} \quad \text{b) חשב:}$$

4. נתונה הפונקציה: $y = x^m \cdot e^{-x^2}$. נתון גם שלפונקציה יש נקודת קיצון כאשר $x = 1$.

האם נכונה הטענה: נקודת הקיצון הנ"ל היא נקודת המינימום?



5. לקוו: $y = -2\sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה $P(a, -2\sqrt{a})$.

המשיק חותך את ציר ה- X בנקודה A . PB מאונך לציר ה- X .

הוכח: הקוו הנתון מחלק את שטח המשולש ABP לשני

חלקים שהיחס בין שטחיהם $1:2$.

דף נוסחאות

אלגברה

נוסחאות וייטה: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $a^{\log_a x} = x$: לוגריתמים

סדרות:

האיבר ה-n-י של סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n-1)d$: הסכום: $S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$

האיבר ה-n-י של סדרה הנדסית: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$: הסכום: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

מספרים מרוכבים:

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

שורשי המשוואה: $z^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ הם:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

הנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

נפח חרוט ופירמידה: $V = \frac{1}{3}S \cdot h$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$

שטח מעטפת של חרוט: $M = \pi R \ell$

גיאומטריה אנליטית

משוואת המעגל: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

משוואת הישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$

משוואת ההיפרבולה: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

אסימפטוטות ההיפרבולה: $y = \pm \frac{b}{a}x$

טריגונומטריה

זהויות טריגונומטריות בסיסיות

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ | 6) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ |
| 2) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ | 7) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ |
| 3) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ | 8) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$ |
| 4) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ | 9) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$ |
| 5) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ | 10) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ |
| | 11) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ |
| | 11a) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ |
| 12) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ | 16) $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ |
| 13) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ | 17) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ |
| 14) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ | 18) $\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$ |
| 15) $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ | |

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות של פונקציות אלמנטריות:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $(x^n)' = n x^{n-1}$ | 6) $(\sin x)' = \cos x$ | 11) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ |
| 2) $(a^x)' = a^x \ln a$ | 7) $(\cos x)' = -\sin x$ | 12) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 3) $(e^x)' = e^x$ | 8) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | 13) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ | 9) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | 14) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| 5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | 10) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ | 15) $(\operatorname{arc} \cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

אינטגרציה: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

פתרונות

X

1) $y = (x^2 - 5x + 6)\sqrt{25 - x^2}$

$$p \geq 1 \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 25 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Number line for } x^2 - 5x + 6 > 0: \text{ roots at } 2, 3, \text{ intervals } (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \\ \text{Number line for } 25 - x^2 \geq 0: \text{ roots at } -5, 5, \text{ interval } [-5, 5] \end{array} \Rightarrow \underline{-5 \leq x < 2 \quad | \quad 3 < x \leq 5}$$

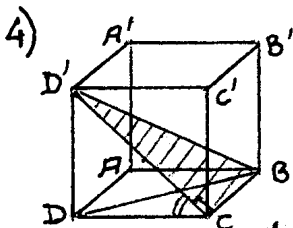
$$2) \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 = \left| \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{x}{y} \right| = \left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} - xy \right) \cdot \left(\frac{x + y}{x^2 - y^2} \right)^2 =$$

$$= \left[\frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y} - xy \right] \frac{(x + y)^2}{(x - y)^2 (x + y)^2} = (x^2 - xy + y^2 - xy) \frac{1}{(x - y)^2} = \frac{(x - y)^2}{(x - y)^2} = 1$$

3) $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 = 0$

$$p \geq 1 \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow p \geq 1 \begin{cases} m \neq 0 \\ (m - 1)^2 - 4m(m - 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$p \geq 1 \begin{cases} m \neq 0 \\ (m - 1)(3m + 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Number line for } (m - 1)(3m + 1) > 0: \text{ roots at } -1/3, 1, \text{ intervals } (-\infty, -1/3) \cup (1, \infty) \end{array} \Rightarrow \underline{x < -1/3 \quad | \quad x > 1}$$



4) @ DBA - הלאה של ה' של האלכסון B'D עם ה' של ההס'.

כן, הנ' D'B'D היא הנ' של האלכסון DB.

ההס' נ' מ' מ' 1/3 של הנ' של ה-א, א' 1/3.

$$D'D = a, DB = a\sqrt{2}, \angle D'B'D = \arctg \frac{D'D}{DB} = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} = 35.26^\circ$$

@ DC - הלאה של ה' של DC עם ה' של ההס', כן DC ⊥ BC.

כן, הנ' D'C'D היא הנ' של ההס'.

$$\angle D'C'D = \arctg \frac{D'D}{DC} = \arctg 1 = 45^\circ$$

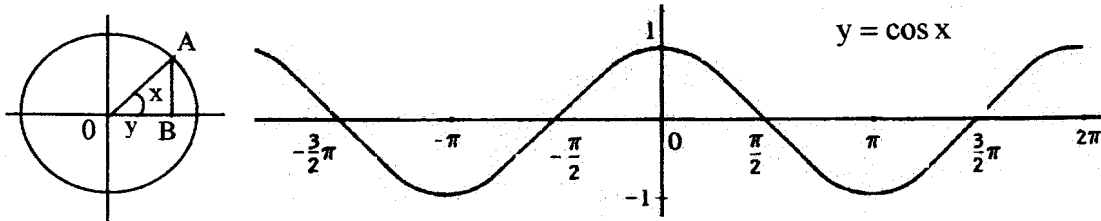
5a) $2 \cos x \cdot \sin 2x = 3 \sin x$

$$4 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (4 \cos^2 x - 3) = 0$$

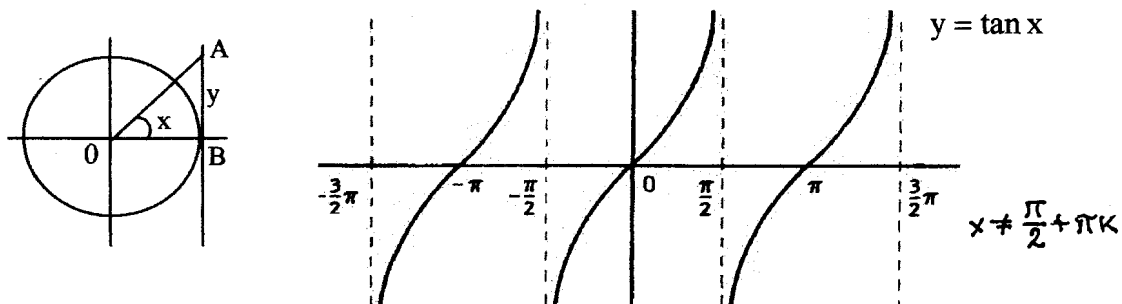
a) $\sin x = 0$
 $x = \pi k$

b) $4 \cos^2 x = 3 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$
 $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

ב) ערך הפונקציה $y = \cos x$ באינטרוויל של פקין פניונית במעגל
 היחידה של פקין פניונית. פונקציה של x (פונקציה של x)



ערך הפונקציה $y = \tan x$ באינטרוויל של פקין פניונית במעגל
 היחידה של פקין פניונית. פונקציה של x (פונקציה של x)



ב

1) $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + (2n-1) \cdot 2n = \frac{n}{3} (n+1) (4n-1)$

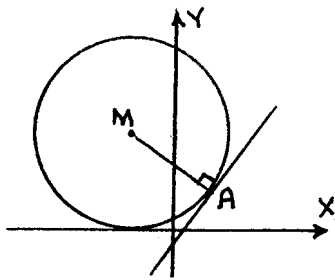
a) $n=1 \Rightarrow (2 \cdot 1 - 1) \cdot 2 \cdot 1 \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} (1+1) (4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow 2 = 2 \checkmark$

b) $n=k \Rightarrow 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + (2k-1) \cdot 2k = \frac{k}{3} (k+1) (4k-1)$

c) $n=k+1 \Rightarrow 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + (2k-1) \cdot 2k + (2k+1) (2k+2) =$
 $= \frac{k+1}{3} (k+2) (4k-3) = \frac{k+1}{3} (4k^2 + 11k + 6)$

d) $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + (2k-1) \cdot 2k + (2k+1) (2k+2) = \frac{k}{3} (k+1) (4k-1) +$
 $+ (2k+1) (2k+2) = \frac{k+1}{3} [k(4k-1) + 6(2k+1)] = \frac{k+1}{3} (4k^2 + 11k + 6) \checkmark$

2)



$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0, \quad A(2, 2)$$

$$(x^2 + 2 \cdot 2x + 4) + (y^2 - 2 \cdot 5y + 25) = 4 + 25 - 4$$

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \Rightarrow M(-2, 5)$$

$$m_{MA} = \frac{2-5}{2+2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{\text{tangent}} = \frac{4}{3}$$

$$y-2 = \frac{4}{3}(x-2) \Rightarrow 4x-3y-2=0$$

3)

a) $y = \ln^2 x^3 \Rightarrow y = (\ln x^3)^2 = (3 \ln x)^2 = 9 \ln^2 x$

$$y' = 9 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{18}{x} \ln x \Rightarrow m = y'(1) = \frac{18}{1} \cdot \ln 1 = 0$$

$$y - (\ln 1^3)^2 = 0(x-1) \Rightarrow \underline{y=0}$$

b) $\int_{\pi/4}^{3\pi/8} \frac{dx}{\sin^2(\pi-2x)} = \frac{1}{-2} (-\cot(\pi-2x)) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/8} = \frac{1}{2} \cot(\pi-2x) \Big|_{\pi/4}^{3\pi/8}$

$$= \frac{1}{2} [\cot(\pi - \frac{3\pi}{4}) - \cot(\pi - \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2} [\cot \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

4) $y = x^m e^{-x^2}$

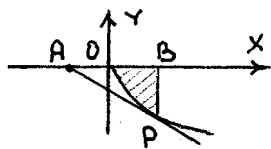
$$y' = m x^{m-1} e^{-x^2} + x^m e^{-x^2} (-2x) \Rightarrow y'(1) = m \cdot e^{-1} - 2e^{-1} = e^{-1}(m-2)$$

$$y' = 0 \Rightarrow e^{-1}(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = x^2 e^{-x^2} \Rightarrow y' = \frac{2(x-x^3)}{e^{x^2}}$$

$$e^{x^2} > 0 \Rightarrow (x-x^3)' = 1-3x^2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 1-3 \cdot 1^2 < 0 \Rightarrow \max$$

$x=1$ זהו נקודת מקסימום. נגזרת של $x-x^3$ היא $1-3x^2$.

5)



$$y = -2\sqrt{x}, \quad P(a, -2\sqrt{a})$$

$$y' = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow m = y'(a) = -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$y + 2\sqrt{a} = -\frac{1}{\sqrt{a}}(x-a) \Rightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} \Rightarrow (\text{תווך נורמלי})$$

$$\underline{A:} \begin{cases} y = -\frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -a \Rightarrow A(-a, 0)$$

$$S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2\sqrt{a} = 2a\sqrt{a}$$

$$S_{\text{OBF}} = \left| \int_0^a (-2\sqrt{x}) dx \right| = 2 \int_0^a \sqrt{x} dx = 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a = \frac{4}{3} a\sqrt{a}$$

$$S_{AOP} = S_{\triangle AOP} - S_{\text{OBF}} = 2a\sqrt{a} - \frac{4}{3} a\sqrt{a} = \frac{2}{3} a\sqrt{a} \Rightarrow \frac{S_{\text{OBF}}}{S_{AOP}} = \frac{2}{1} \rightarrow (\text{שני})$$