

מבחן קבלה במתמטיקה

תאריך: 14.10.2020

המרצה: ד"ר יעקב רזניק

הוראות לנבחן:

1. נא לכתוב בעט, בצבע שחור וכחול בלבד, בכתב ברור ונקי.
2. משך המבחן 3 שעות.
3. תשובה על כל שאלה יש להתחיל בדף חדש
4. חומר עזר מותר: מחשבון (לא גרפי)
5. אסור להוציא את טופס המבחן

בהצלחה !

שמירה על טוהר הבחינות

- הלימודים במרכז האקדמי רופין מבוססים על אמון בין הסטודנטים לבין המוסד על סגל מוריו ועובדיו. הסטודנטים מצופים להתנהגות ההולמת את כבוד המרכז כמוסד אקדמי ואת מעמדם כסטודנטים. ידוע לי כי העבירות שלהלן הן עבירות משמעת:
1. הכנסת חומר עזר אסור לבחינה או החזקתו בעת הבחינה.
 2. התקשרות או ניסיון התקשרות בין בכתב ובין בדרך אחרת עם נבחן אחר או גורם חוץ, בעת בחינה.
 3. הכנסת שינוי כלשהו בבחינה לאחר תום מועד הבחינה או בשעת עיון בה לאחר מתן ההערכה.

הנני מתחייב/ת לעבודה עצמאית בבחינה.

ת"ז לשם אישור

מבחן קבלה במתמטיקה (פתרון)

1. א. (15 נק') פתור את המשוואה:

$$5^{\log_x(2-x)} = 25 \cdot 5^{\log_x 3}$$

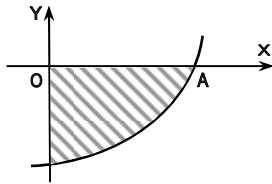
פתרון

$$5^{\log_x(2-x)} = 25 \cdot 5^{\log_x 3} \Rightarrow 5^{\log_x(2-x)} = 5^{2+\log_x 3} \Rightarrow \log_5(5^{\log_x(2-x)}) = \log_5(5^{2+\log_x 3}) \Rightarrow$$

$$\log_x(2-x) \log_5 5 = (2 + \log_x 3) \log_5 5 \Rightarrow \log_x(2-x) = 2 + \log_x 3 \Rightarrow$$

$$\log_x(2-x) = 2 \log_x x + \log_x 3 \Rightarrow \log_x(2-x) = \log_x x^2 + \log_x 3 \Rightarrow \log_x(2-x) = \log_x 3x^2$$

$$2-x = 3x^2, \quad 3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$



ב. (10 נק') גרף הפונקציה $y = e^{2x-2} - 1$ חותך את ציר ה-X בנקודה A (ראה שרטוט).

a) מצא את קואורדינטות הנקודה A.

b) חשב את השטח המקווקו.

פתרון

$$a) y = e^{2x-2} - 1 \Rightarrow e^{2x-2} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2x-2} = e^0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0)$$

השטח המקווקו נמצא מתחת לציר ה-X. לכן בחישוב השטח יש לשנות את הסימן של האינטגרל.

$$b) S = -\int_0^1 (e^{2x-2} - 1) dx = -\left(\frac{1}{2}e^{2x-2} - x\right)\Big|_0^1 = -\left[\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2e^2} - 0\right)\right] = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2}}$$

2. א. (15 נק') פתור את המשוואה $1 - \sin 2x = \sin^2 x$.

פתרון

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x \Rightarrow (1 - \sin^2 x) - \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 2 \sin x) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 180^\circ k}, \quad \cos x - 2 \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 2 \sin x \Rightarrow$$

$$\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arctan 0.5 + 180^\circ k \Rightarrow \boxed{x = 26.57^\circ + 180^\circ k}$$

2)ב. (5 נק') מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{16}{\pi} x^2 \sin 2x$ בנקודה $x = \frac{\pi}{4}$.

פתרון

$$y = \frac{16}{\pi} x^2 \sin 2x, \quad x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{16}{\pi} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot 1 = \pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$$

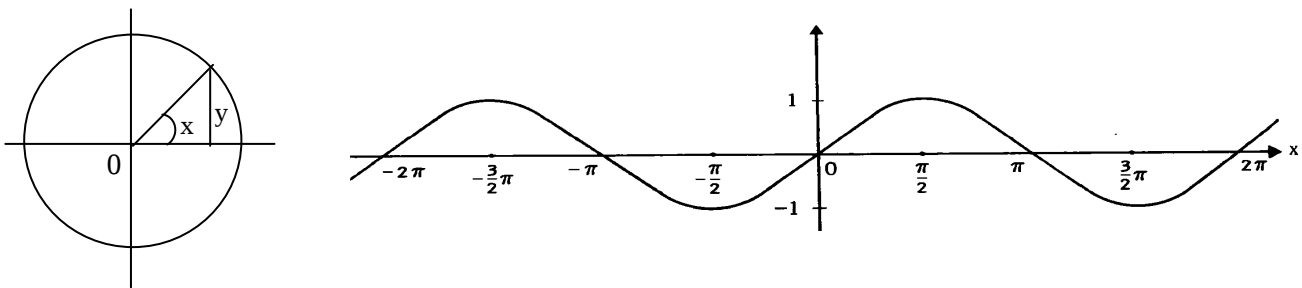
$$y' = \frac{16}{\pi} (2x \sin 2x + x^2 \cdot 2 \cos 2x), \quad m = y' \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16}{\pi} \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 + \frac{\pi^2}{16} \cdot 2 \cdot 0\right) = 8 \Rightarrow$$

$$y - \pi = 8 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = 8x - \pi}$$

ג. (5 נק') הפונקציה $y = \sin x$: הגדרה באמצעות המעגל הטריגונומטרי, תכונות וגרף הפונקציה.

פתרון

פונקציה מחזורית, מחזור הפונקציה שווה ל- 360° . פונקציה אי-זוגית. תחום ההגדרה $-\infty < x < \infty$, תחום ההשתנות של y : $-1 \leq y \leq 1$,



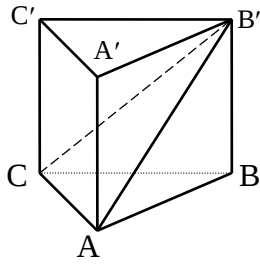
3)א. (15 נק') מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \sqrt{\log(x^2 + 1) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5 - |x|}}$.

פתרון

נרשום את מערכת האי שוויונים (מערכת מהסוג וגם) $y = \sqrt{\log(x^2 + 1) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5 - |x|}} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \log(x^2 + 1) - 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ 5 - |x| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x^2 + 1) \geq \log 10 \\ x^2 + 1 > 0 \\ 5 - |x| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 10 \\ -\infty < x < \infty \\ |x| < 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ -\infty < x < \infty \\ -5 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 3) \geq 0 \\ -\infty < x < \infty \\ -5 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-5 < x \leq -3} \text{ או } \boxed{3 \leq x < 5}$$



3ב. בסיסה של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הוא משולש ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$) ושווה שוקיים:

$$AB = AC = a$$

נתון גם: $\angle CB'A = 30^\circ$.

מצא את הזווית בין מישור המשולש $CB'A$ למישור הבסיס ABC .

פתרון

נשתמש במשפט 3 אנכים כדי למצוא את $B'A$. נתון $AB \perp CA$, AB הוא היטל של $B'A$ על המישור ABC (כי $ABCA'B'C'$ היא מנסרה ישרה), לכן $B'A \perp CA$. במשולש ישר זווית נמצא

$$B'A = \frac{AC}{\tan 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}/3} = a\sqrt{3}$$

הישר AC הוא ישר החיתוך של המישורים $CB'A$ ו- ABC , $B'A \perp CA$ ו- $AB \perp CA$ לכן לפי ההגדרה הזווית בין המישורים $CB'A$ ו- ABC היא זווית בין האנכים $B'A$ ו- AB לישר

החיתוך AC . במשולש BAB' מתקיים $\frac{AB}{AB'} = \cos \angle BAB'$, לכן

$$\angle BAB' = \arccos \frac{AB}{AB'} = \arccos \frac{a}{a\sqrt{3}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{54.74^\circ}.$$

$$\frac{(\sqrt{x} + 1)^{-1}}{\left(\frac{x^{1.5} - 1}{x^{0.5} - 1} + x^{0.5}\right)^{-1}} : \left(\frac{x^{0.5} - 1}{x - 1}\right)^{-1} = 1$$

4א. (15 נק') הוכח את הזהות

פתרון

$$\frac{(\sqrt{x} + 1)^{-1}}{\left(\frac{x^{1.5} - 1}{x^{0.5} - 1} + x^{0.5}\right)^{-1}} : \left(\frac{x^{0.5} - 1}{x - 1}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}\right)^{-1} = \left|\sqrt{x} = a\right| =$$

$$= \frac{1}{a + 1} : \left(\frac{a - 1}{a^2 - 1}\right)^{-1} = \frac{1}{a + 1} : \left(\frac{(a - 1)}{(a + 1)(a - 1)}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(a + 1)(a^2 + a + 1 + a)^{-1}} : \left(\frac{1}{a + 1}\right)^{-1} = \frac{1}{(a + 1)(a^2 + 2a + 1)^{-1}} : (a + 1) =$$

$$= \frac{1}{(a + 1)(a + 1)^{-2}} \cdot \frac{1}{a + 1} = \frac{1}{(a + 1)} \cdot \frac{1}{a + 1} = \frac{(a + 1)^2}{(a + 1)(a + 1)} = \frac{\cancel{(a + 1)^2}}{\cancel{(a + 1)^2}} = 1$$

ב. (5 נק') חשב:

a) $\int \frac{dx}{5-2x}$

b) $\int e^x (1+e^{3x}) dx$

c) $\int \sin x \cos x dx$

פתרון

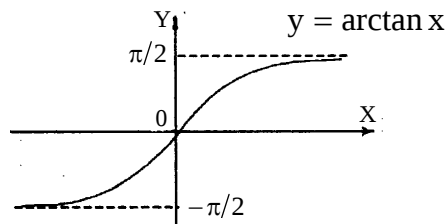
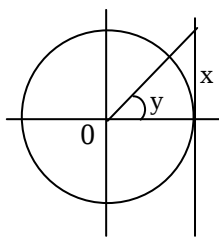
a) $\int \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2} \ln|5-2x| + C$

b) $\int e^x (1+e^{3x}) dx = \int (e^x + e^{4x}) dx = e^x + \frac{1}{4} e^{4x} + C$

c) $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$

ג. (5 נק') הפונקציה $y = \arctan x$: ההגדרה באמצעות המעגל הטריגונומטרי, תכונות וגרף הפונקציה.

פתרון



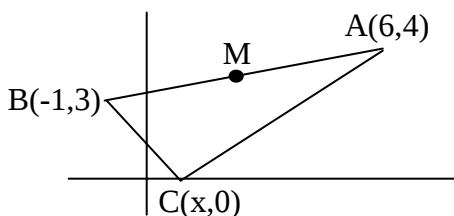
פונקציה אי-זוגית

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

5. א. (15 נק') הקדקוד C של משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) נמצא על ציר ה-X ושני הקדקודים האחרים הם $B(-1,3)$, $A(6,4)$.
 (a) מצא את קואורדינטות הקדקוד C.
 (b) מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABC.

פתרון



a) $m_{BC} = \frac{0-3}{x+1} = -\frac{3}{x+1}$, $m_{AC} = \frac{4-0}{6-x} = \frac{4}{6-x}$,

$$BC \perp AC \Rightarrow m_{BC} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow -\frac{3}{x+1} \cdot \frac{4}{6-x} = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3 \Rightarrow$$

$$\boxed{C(2,0), C(3,0)}$$

(b) הזווית הישרה C היא זווית היקפית והיא נשענת על קוטר המעגל AB. אם M הוא מרכז המעגל, אז MB הוא רדיוס המעגל. לכן

$$x_M = \frac{6-1}{2} = 2.5, y_M = \frac{3+4}{2} = 3.5 \Rightarrow M(2.5, 3.5)$$

$$R^2 = MB^2 = (2.5+1)^2 + (3.5-3)^2 = 12.5 \Rightarrow \boxed{(x-2.5)^2 + (y-3.5)^2 = 12.5}$$

5 ב. (10 נק') פתור את המשוואה $\cdot (10x^2)^{3-\log x} = x^6$

פתרון

$$(10x^2)^{3-\log x} = x^6 \Rightarrow (3-\log x)\log(10x^2) = 6\log x \Rightarrow \log x = t \Rightarrow (3-t)(1+2t) = 6t \Rightarrow$$

$$-2t^2 + 5t + 3 = 6t \Rightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow t = 1, t = -3/2 \Rightarrow$$

$$\log x = 1 \Rightarrow \boxed{x=10}, \quad \log x = -3/2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{10\sqrt{10}}}$$