

מבחן סיום במתמטיקה

קורס קדם במתמטיקה

הוראות לנבחן:

1. נא לכתוב בעט, בצבע שחור וכחול בלבד, בכתב ברור ונקי.
2. משך המבחן 3 שעות.
3. תשובה על כל שאלה יש להתחיל בדף חדש
4. חומר עזר מותר: מחשבון (לא גרפי)
5. אסור להוציא את טופס המבחן

בהצלחה !

שמירה על טוהר הבחינות

- הלימודים במרכז האקדמי רופין מבוססים על אמון בין הסטודנטים לבין המוסד על סגל מוריו ועובדיו. הסטודנטים מצופים להתנהגות ההולמת את כבוד המרכז כמוסד אקדמי ואת מעמדם כסטודנטים. ידוע לי כי העבירות שלהלן הן עבירות משמעת:
1. הכנסת חומר עזר אסור לבחינה או החזקתו בעת הבחינה.
 2. התקשרות או ניסיון התקשרות בין בכתב ובין בדרך אחרת עם נבחן אחר או גורם חוץ, בעת בחינה.
 3. הכנסת שינוי כלשהו בבחינה לאחר תום מועד הבחינה או בשעת עיון בה לאחר מתן ההערכה.

הנני מתחייב/ת לעבודה עצמאית בבחינה.

ת"ז לשם אישור

מבחן סיום במתמטיקה

26.08.2018

ענה על 4 שאלות (כל שאלה - 25 נק')

1. א. (15 נק') הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$$

ב. (10 נק') פתור את המשוואה הנתונה (הצג את הפתרון בצורה אלגברית ובצורה טריגונומטרית):

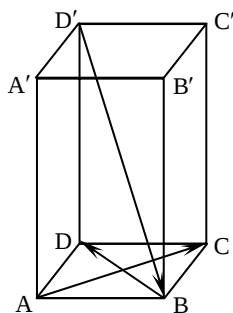
$$|z| + \bar{z} + 8i = 5 + z$$

2. א. (15 נק') פתור את המשוואה $1 - \sin 2x = \sin^2 x$.

ב. (5 נק') מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{16}{\pi} x^2 \sin 2x$ בנקודה $x = \frac{\pi}{4}$.

ג. (5 נק') הפונקציה $y = \sin x$: הגדרה באמצעות המעגל הטריגונומטרי, תכונות וגרף הפונקציה

3. א. (15 נק') מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \sqrt{\log(x^2 + 1) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5 - |x|}}$.



ב. (10 נק') במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתונים הווקטורים:

$$\overrightarrow{AC} = (7, -2, -6), \quad \overrightarrow{BD} = (-3, -6, 8), \quad \overrightarrow{D'B} = (3, 5, -6)$$

(a) מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$.

(b) מצא את הזווית שיוצר הווקטור $\overrightarrow{AD'}$ עם הצירים.

(c) מצא את הזווית בין הווקטורים $\overrightarrow{D'B}$ ו- $\overrightarrow{D'C'}$.

4 א. (15 נק') הוכח את הזהות

$$\frac{(\sqrt{x} + 1)^{-1}}{\left(\frac{x^{1.5} - 1}{x^{0.5} - 1} + x^{0.5}\right)^{-1}} : \left(\frac{x^{0.5} - 1}{x - 1}\right)^{-1} = 1$$

ב. (5 נק') חשב :

a) $\int \frac{dx}{5 - 2x}$ b) $\int e^x (1 + e^{3x}) dx$ c) $\int \sin x \cos x dx$

ג. (5 נק') הפונקציה $y = \arctan x$: ההגדרה באמצעות המעגל הטריגונומטרי, תכונות וגרף הפונקציה.

5 א. (15 נק') הקדקוד C של משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) נמצא על ציר ה-X ושני הקדקודים האחרים הם $A(6, 4)$, $B(-1, 3)$.
 (a) מצא את קואורדינטות הקדקוד C.
 (b) מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABC.

ב. (10 נק') פתור את המשוואה

$$(10x^2)^{3 - \log x} = x^6$$

דף נוסחאות

אלגברה

לוגריתמים:

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a x = \frac{\log_m x}{\log_m a}$$

סדרות
סדרה חשבונית:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}, \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

סדרה הנדסית:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad S = \frac{a_1}{1 - q}$$

מספרים מרוכבים

$$\begin{aligned}
 z &= a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\
 z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\
 (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \cos n\varphi + i \sin n\varphi \\
 \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

גיאומטריה

הנדסת המישור

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad y - y_1 = m(x - x_1), \quad m_1 m_2 = -1 \\
 AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}
 \end{aligned}$$

הנדסת המרחב

$$V = Sh, \quad V = \frac{1}{3}Sh, \quad V = \pi R^2 h, \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad \text{נפחים של גופים:}$$

וקטורים

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{a}^\circ = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) \\
 \vec{a}^\circ &= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2
 \end{aligned}$$

טריגונומטריה

- | | |
|--|---|
| <p>1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$</p> <p>2) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$</p> <p>3) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$</p> <p>4) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$</p> <p>5) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$</p> | <p>6) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$</p> <p>7) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$</p> <p>8) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$</p> <p>9) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$</p> <p>10) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$</p> <p>11) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$</p> <p>11a) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$</p> |
|--|---|
-
- | | |
|---|--|
| <p>12) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$</p> <p>13) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$</p> <p>14) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$</p> <p>15) $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$</p> | <p>16) $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$</p> <p>17) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$</p> <p>18) $\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$</p> <p>19) $\sin 3\alpha = -\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$</p> <p>20) $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$</p> |
|---|--|

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות של פונקציות אלמנטריות:

- | | | |
|---|--|--|
| <p>1) $(x^n)' = n x^{n-1}$</p> <p>2) $(a^x)' = a^x \ln a$</p> <p>3) $(e^x)' = e^x$</p> <p>4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$</p> <p>5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$</p> | <p>6) $(\sin x)' = \cos x$</p> <p>7) $(\cos x)' = -\sin x$</p> <p>8) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$</p> <p>9) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$</p> <p>10) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$</p> | <p>11) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$</p> <p>12) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</p> <p>13) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</p> <p>14) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$</p> <p>15) $(\operatorname{arc} \cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$</p> |
|---|--|--|

כללי האינטגרציה

- | | |
|--|--|
| <p>1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$</p> <p>2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$</p> <p>3) $\int e^x dx = e^x + C$</p> <p>4) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$</p> <p>5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$</p> <p>6) $\int \cos x dx = \sin x + C$</p> <p>7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$</p> | <p>8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$</p> <p>9) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$</p> <p>10) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$</p> <p>11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$</p> <p>12) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$</p> <p>13) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$</p> <p>13') $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$</p> |
|--|--|