

תורת המעגלים החשמליים

מספר קורס

200106

ד"ר ינון סתיו

דפי נוסחאות - נספח לבחינה^(†)

גרסה 2.0 - ינואר 2026

^(†) מבוסס על דפי הנוסחאות בקורס "תורת המעגלים החשמליים" של הפקולטה להנדסת חשמל ומחשבים של הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, כפי שנכתבו ע"י דוד גדעוני וינון סתיו בשנים 2010-2025

אין לכתוב או לסמן על גבי נספח זה !!

יש להחזיר למשגיח/ה

בסיום הבחינה



2.3 חוקי קירכהוף

KCL – סך סכום הזרמים היוצאים (סימן חיובי) והנכנסים (סימן שלילי) לצומת חשמלית הוא אפס: $\sum_{K=1}^B i_K(t) = 0$ (ענפים מחוברים לצומת)

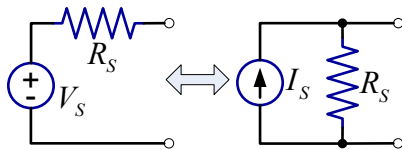
$$\sum_{K=1}^B i_K(t) = 0$$

KVL – הסכום האלגברי של כל המתחים של B ענפים לאורכה של לולאה (חוג או עין ברשת) סגורה הוא אפס:

$$\sum_{K=1}^B v_K(t) = 0$$

2.4 המרת מקורות מעשיים

מקור מתח מעשי ומקור זרם מעשי שקולים כלפי שאר הרשת וניתן להמיר ביניהם:



איור 2 – המרה בין שקול נורטון לשקול תבנין

$$V_S = R \cdot I_S, \quad R = \frac{V_S}{I_S}, \quad I_S = \frac{V_S}{R}$$

ההמרה תקפה כלפי כלל הרשת, אך לא בתוך הענף שעבר המרה.

3 רשתות התנגדות

3.1 חיבור נגדים בטור ומקביל

שקול של חיבור נגדים בטור:

$$R_{eq} = \sum_{n=1}^N R_n$$

חיבור נגדים במקביל:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n} = \sum_{n=1}^N G_n = G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$$

3.2 מחלק מתח

אם על N נגדים המחוברים בטור נופל מתח כולל V_{TOT} , אזי המתח על הנגד ה- k יינתן ע"י 'מחלק המתח':

$$V_k = V_{TOT} \cdot \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_N}$$

3.3 מחלק זרם

אם דרך N נגדים המחוברים במקביל זורם זרם כולל I_{TOT} , הזרם דרך הנגד ה- k יינתן ע"י 'מחלק הזרם':

$$I_k = I_{TOT} \cdot \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \dots + G_N}$$

במקרה של שני נגדים בלבד, מחלק הזרם ביניהם הוא:

$$I_1 = I_{TOT} \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I_{TOT} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

1 פונקציות מתמטיות שימושיות

$$j = \sqrt{-1}, \quad \exp(j\phi) = \cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi)$$

1.1 פונקציות סינגולריות

1.1.1 Unit Step Function ; פונקציית מדרגה

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t-t_0 < 0 \\ 1 & t-t_0 \geq 0 \end{cases} \quad \text{הגדרה:}$$

1.1.2 פונקציית הלם (דלתא של דיראק)

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt} [u(t-t_0)] \quad \text{הגדרה:}$$

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0) dt = 1; \quad \text{תכונות:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

2 מבוא ומושגי יסוד

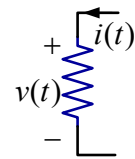
2.1 חוק אוהם

$$v_R(t) = i_R(t) \cdot R \quad \text{נגד ליניארי:}$$

$$i_R(t) = v_R(t) \cdot G$$

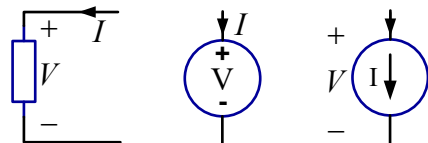
$$Ohm = [\Omega] = \frac{[V]}{[A]}$$

$$Siemens = [S] = \frac{[A]}{[V]} = \frac{1}{[\Omega]}$$



2.2 הספק וכיווני ייחוס

$$p(t) \triangleq \frac{d}{dt} W(t) = v(t) \cdot i(t) \quad \text{הספק חשמלי נצרך:}$$



איור 1 – החלת כיווני ייחוס ע"פ קונבנציית הצרכן למקורות כמו גם לענף כללי

רכיב צרכן שממיר אנרגיה חשמלית לאחרת: $p(t) > 0$
רכיב המשמש מקור אנרגיה חשמלית: $p(t) < 0$

$$p_R(t) = i_R^2(t) R = \frac{v_R^2(t)}{R} = v_R^2(t) G \quad \text{הספק רגעי בנגד:}$$

חישוב הספק ממוצע עבור תחום זמן T; (כאשר האות מחזורי בזמן, מקובל כי T זהו זמן המחזור):

$$\langle p(t) \rangle_t = P_{av} \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

5 משפטי רשת

איפוס מקור זרם ב"ת = ניתוק
איפוס מקור מתח ב"ת = החלפתו בקצר

5.1 משפט הסופרפוזיציה

ברשת ליניארית (בה כל הרכיבים ליניאריים), תגובת (פתרון) הרשת למספר מקורות מתח או זרם נתונה על ידי סכום התגובות המחושות לכל מקור **בלתי תלוי** בנפרד, כאשר:

- בחישוב התגובה לכל מקור ב"ת בנפרד יש לאפס את כל המקורות ה**ב"ת** האחרים, כלומר להחליף את כל מקור מתח ב"ת בקצר וכל מקור זרם ב"ת בנתק.
- אם קיימים רכיבים ריאקטיביים ברשת (סליל, קבל) עקרון הסופרפוזיציה נכון רק עבור התגובות לתנאי התחלה אפס (ללא אנרגיה התחלתית "טעונה" ברכיבים)

5.2 משפט ההצבה

בהינתן רשת בעלת פתרון יחיד (בדרך כלל ליניארית), כאשר בענף k ,

מתקבל מניתוח הרשת מתקיימים מתח V_k וזרם I_k אם כאשר:

- נחליף את הרכיב בענף במקור מתח אידאלי (ב"ת או מבוקר) בעל מתח V_k , או לחילופין
- נחליף את הרכיב בענף במקור זרם אידאלי (ב"ת או מבוקר) בעל זרם I_k ;
- אזי פתרון הרשת החדשה זהה לפתרון הרשת המקורית.

5.3 משפט תבנין / נורטון

ברשת N , המחוברת לענף עומס ואשר מקיימת:

- הרשת N ליניארית (העומס לא בהכרח !)
- הרשת N , אינה כוללת מקורות מבוקרים התלויים בגדלים שמחוץ לה, וכן אינה משפיעה ישירות על מקורות מבוקרים שמחוץ לה.
- ביחס לחלקו השני של המשפט, ובפרט ענף העומס אינו כולל מקור מבוקר התלוי בענפי הרשת.
- קיים פתרון יחיד שאינו טריוויאלי, כאשר מחברים מקור זרם או מתח ב"ת בין הדקי הרשת.

אזי כלפי העומס, ניתן להחליף את הרשת במקור זרם מעשי (שקול נורטון) או מקור מתח מעשי (שקול תבנין), כמתואר באיור 2, אותם ניתן להמיר זה בזה, כאשר:

- ערכו של מקור המתח המעשי (מקור תבנין) הוא המתח שנמדד **בניקם** בין הדקי העומס של רשת N
- ערכו של מקור הזרם המעשי (מקור נורטון) הוא הזרם שנמדד **בקצר** בין הדקי העומס של רשת N

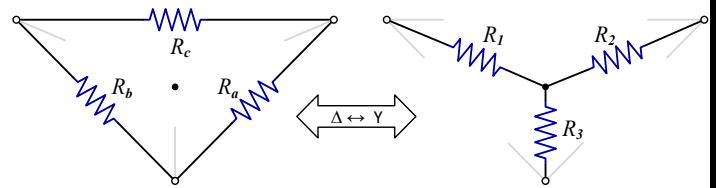
- אימפדנס המקור המעשי זהה ליחס:

$$Z_{Th} = Z_N = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} = \frac{V_{Th}}{I_N}$$

בנוסף, $Z_{Th} = Z_N$ זהה לאימפדנס של הרשת N_0 , המתקבל מאיפוס כל המקורות ה**ב"ת** ברשת המקורית N , ונמדד בין ההדקים המחוברים לעומס. אותו ניתן למצוא באחת מהדרכים:

1. רק אם אין מקורות מבוקרים, כחלק מהרשת N_0 , מציאת ההתנגדות השקולה בין ההדקים.
2. חיבור מקור בוחן בין הדקי הרשת (במקום ענף העומס k), וחיסוב ההתנגדות המשוקפת כלפי המקור.

3.4 המרות משולש <--> כוכב



איור 3 – המרות משולש <--> כוכב

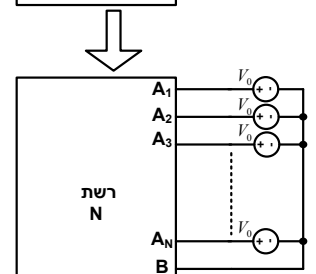
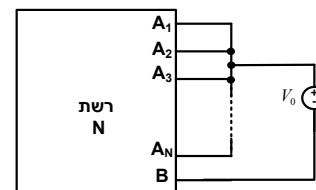
$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}, \quad R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}, \quad R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

4 שיטות ניתוח אלגבריות (מטריציות)

4.1 שיטת מתחי הצמתים

1. יש להזין מקורות מתח אידאליים.



איור 4 – דוגמא להזנת מקור מתח

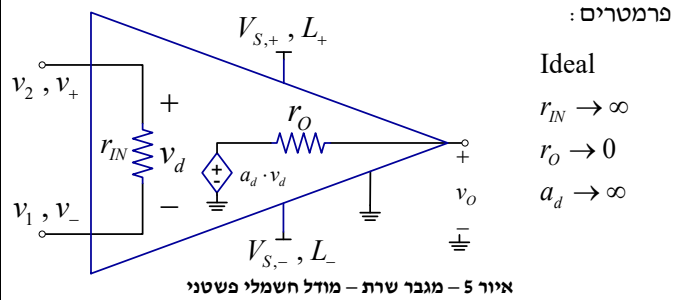
2. יש לבצע התמרת נורטון למקורות מתח לא אידאליים.
3. יש להגדיר צומת ייחוס, ולמספר את כל שאר n הצמתים ברשת: $n = N - 1$.
4. בניית משוואות מתחי הצמתים (יחסית לצומת הייחוס) כך:
 - Y_{kk} סכום האדמיטנסים של הענפים המתחברים לצמת k
 - $Y_{kl} (k \neq l)$ הוא סכום האדמיטנסים של הענפים המקשרים ישירות בין צמת k לצמת l בסימן מינוס
 - $i_{sn,k}$ הוא הסכום האלגברי של כל מקורות הזרם (כולל מקורות מתח לא אידאליים מותמרים) הנכנסים לצמת k . (בסימן הפוך להסכם KCL, עקב העברת אגף במשוואה)

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{sn,1} \\ i_{sn,2} \\ \vdots \\ i_{sn,n} \end{bmatrix}$$

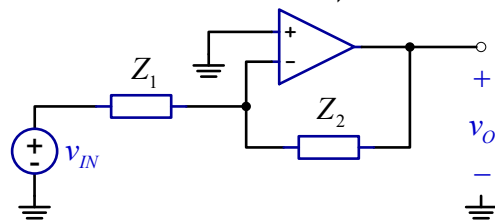


6 מגברי שרת אידיאלי ומעשי

6.1 מודל חשמלי למגבר שרת אידיאלי ומעשי

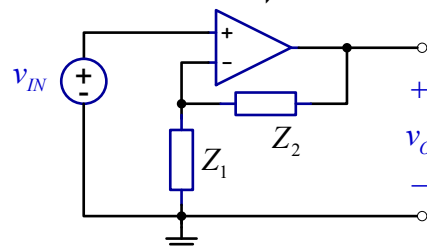


6.2 מגבר הופך



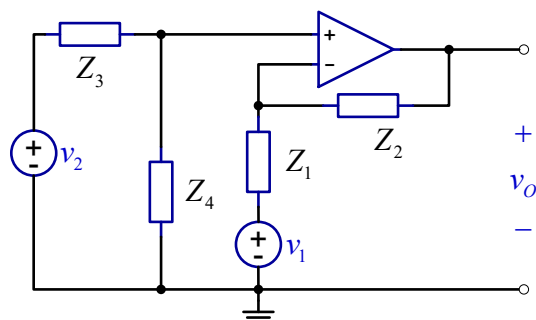
$$H = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

6.3 מגבר לא הופך



$$H = \frac{V_{out}}{V_{in}} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

6.4 מגבר הפרש



$$V_{out}(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1} \left[\left(\frac{1 + Z_1/Z_2}{1 + Z_3/Z_4} \right) \cdot V_2 - V_1 \right]$$

7 רכיבים ריאקטיביים

7.1 קבלים

קבל (לא בהכרח ליניארי):
קבל (ליניארי אבל תלוי בזמן):

$$q_C(t) = C(t) \cdot v_C(t)$$

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = C(t) \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \frac{dC(t)}{dt}$$



קבל (ליניארי וגם ב"ת בזמן; כלומר LTI):

$$q_C(t) = C \cdot v_C(t) \Rightarrow i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_C(t_1) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^{t_1} i_C(t) dt$$

יחידת הקיבול:

$$[Farad] = [F] = \frac{[C]}{[V]} = \frac{[A \cdot sec]}{[V]} = \frac{[sec]}{[\Omega]}$$

$$C_{eq} = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right)^{-1}$$

שקול של חיבור קבלים בטור:

$$C_{eq} = \sum_{n=1}^N C_n$$

שקול של חיבור קבלים במקביל:

$$W_E(t) = W_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot v_C^2(t)$$

אנרגיה רגעית אגורה בקבל:

7.2 סלילים / השראות

סליל כללי, והמקרה הליניארי:

$$\text{Non-Linear: } \Phi(i_L) = f(i_L)$$

$$\text{If Linear: } N\Phi(t) = L(t) \cdot i_L(t)$$

$$\Rightarrow v_L(t) = N \frac{d\Phi(t)}{dt} = L(t) \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \frac{dL(t)}{dt}$$

$$\text{If LTI: } v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t_1) = i_L(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^{t_1} v_L(t) dt$$

יחידת ההשראות (L):

$$[Henry] = [H] = \frac{[Wb]}{[A]} = \frac{[V \cdot sec]}{[A]} = [\Omega \cdot sec]$$

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^N L_n$$

שקול של חיבור סלילים בטור:

$$L_{eq} = \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right)^{-1}$$

שקול של חיבור סלילים במקביל:

$$W_M(t) = W_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2(t)$$

אנרגיה רגעית אגורה בסליל:

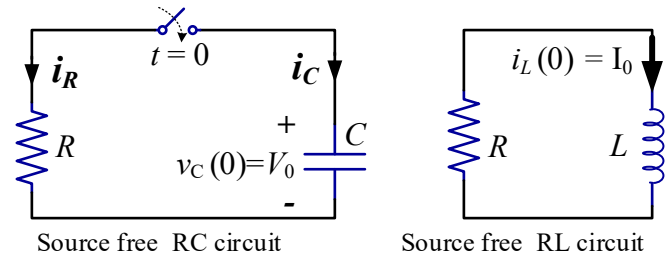


8 תופעות מעבר במעגלים מסדר ראשון

8.1 ZIR (תגובה טבעית לתנאי ההתחלה)

קבוע זמן במעגל RC: $\tau = RC$ [sec]

קבוע זמן במעגל RL: $\tau = L/R$ [sec]



איור 9 – תגובות ZIR, נטולות מקורות, של שני מעגלי הסדר הראשון

פתרון ZIR לתנאי ההתחלה, למעגלים מסדר ראשון, כאשר $y(t) = v_C(t)$ במעגל RC או $y(t) = i_L(t)$ במעגל RL:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t) + \frac{1}{\tau} y(t) = 0 & t > 0 \\ y(t) = y_0 & t \leq 0 \end{cases}$$

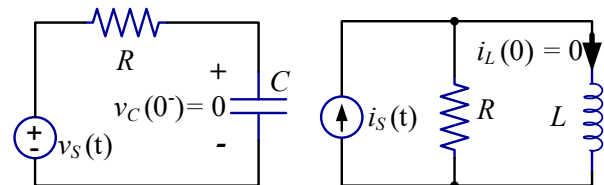
צורה קנונית:

$$y^{ZIR}(t) = \begin{cases} y_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & t > 0 \\ y_0 & t = 0 \end{cases}$$

פתרון:

8.2 ZSR (תגובה מאולצת למקורות, ללא ת"ה)

תגובה למקורות משתנים בזמן, של מעגלים מסדר ראשון ללא ת"ה.



איור 10 – תגובות ZSR, נטולות ת"ה, של שני מעגלי סדר ראשון, RC ו RL

את הצורה הכללית נתאר עבור המקרה הפרטי של מעגל RC, כלומר: $y(t) = v_C(t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v_C(t) + \frac{1}{\tau} v_C(t) = \frac{1}{\tau} v_S(t) & t > 0 \\ v_C(t) = 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

צורה קנונית:

8.2.1 מציאת ZSR ע"י מציאת פתרון כללי:

הפתרון הכללי נגזר מידיעת הפתרון הפרטי $y^P(t)$, (במקרים רבים זהו המצב המתמיד), סיכום הפתרון הפרטי עם הפתרון ההומוגני, ואילוף ת"ה:

$$y(t) = y^P(t) + y^H(t)$$

$$y(t) = \left[y^P(t) + A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

עבור ZSR, נאלץ ת"ה אפס על המקדם A, עבור $v_C(t)$ (כדוגמה):

$$v_C^{ZSR}(t=0^+) = 0$$

$$\Rightarrow v_C^{ZSR}(t) = \left[v_C^P(t) - v_C^P(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

8.2.1 מקרה פרטי - תגובות ZSR לכניסת מדרגה:

התגובה הזמנית לכניסת מקור דמוי מדרגה מהצורה:

$$\frac{1}{\tau} \cdot v_S(t - t_0) = \frac{1}{\tau} \cdot V_S \cdot u(t - t_0)$$

כאשר u מייצגת מדרגת יחידה, ות"ה שווים אפס, היא בה"כ למתח הקבל:

$$v_C(t - t_0) = V_S \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) \right] \cdot u(t - t_0)$$

8.2.2 תגובות ZSR לכניסת הלם:

התגובה הזמנית לכניסת מקור הלם (Impulse) מהצורה:

$$\frac{1}{\tau} \cdot v_S(t - t_0) = \frac{1}{\tau} \cdot \delta(t - t_0)$$

כאשר δ היא גבול נוח לתיאור של פולס יחידה (Unity pulse):

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{\Delta}(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u[t - (t_0 - \Delta t)] - u(t - t_0)}{\Delta t}$$

קרויה התגובה להלם של מעגל מסדר ראשון, וזוכה לסימון $h(t)$:

$$y^{ZSR}(t - t_0) \triangleq h(t - t_0) = \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left[-\frac{(t - t_0)}{\tau}\right] \cdot u(t - t_0)$$

ואזי בהינתן כניסה כלשהי, אם לא מוכר הפתרון הפרטי, שימוש באינטגרל קונבולוציה יניב:

$$v_C^{ZSR}(t) = \begin{cases} \int_0^t v_S(\xi) \cdot \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t - \xi}{\tau}\right) \cdot u(t - \xi) d\xi & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

8.3 תגובה כוללת:

בה"כ, התגובה הזמנית הכוללת: $y(t) = y^{ZIR}(t) + y^{ZSR}(t)$ במקרה בו ZSR התבסס על מציאת פתרון פרטי ידוע:

$$v_C(t) = \left\{ v_C^P(t) + [V_0 - v_C^P(0)] \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\} u(t)$$

8.3.1 מקרה פרטי; משוואת הדפקים:

$$v_C(0) = V_0$$

משוואת דפקים בסיסית הינה כאשר:

$$v_S(t) = V_{\infty} \cdot u(t)$$

התגובה הכוללת המתקבלת היא:

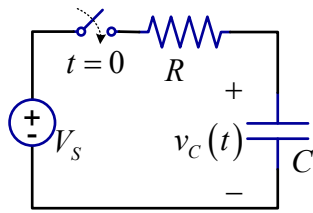
$$v_C(t) = V_{\infty} + (V_0 - V_{\infty}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

הפתרון הדואלי עבור מעגל RL:

$$i_L(t) = I_{\infty} + (I_0 - I_{\infty}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



9.2 הספק ואנרגיה בזמן תופעת מעבר מסדר ראשון:



איור 13 – מעגל RC, תגובה למדרגה

בהנחת ת"ה אפס, בסיום טעינת הקבל ($T \gg \tau$), נצרכת אנרגיה מהמקור, בשיעור קבוע, ללא תלות בערכו של הנגד הטורי R:

$$W_{Supply}(\infty) = C \cdot V_S^2$$

$$W_C(\infty) = \frac{1}{2} C \cdot V_S^2$$

בהנחת תנאי התחלה על הקבל אפס, האנרגיה הנצרכת עד זמן T:

$$W_{Supply}(T) = \int_0^T V_S \cdot i_C(t) dt = C \cdot V_S^2 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right]$$

מתוכה, האנרגיה שנצרכת כהספק חום בנגד, עד זמן T:

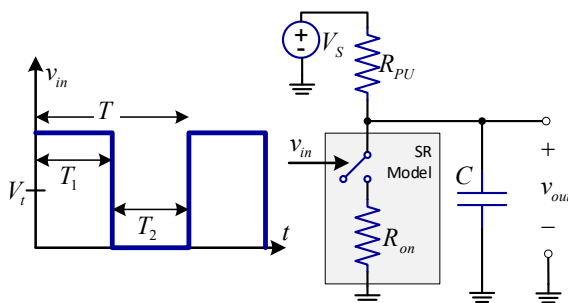
$$W_{diss}(T) = \int_0^T R \cdot i_C^2(t) dt = \frac{1}{2} C \cdot V_S^2 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right) \right]$$

כאשר בקבל נאגרת, עד זמן T, אנרגיה חשמלית:

$$W_C(T) = \frac{1}{2} C \cdot v_C^2(T) = \frac{1}{2} C \cdot V_S^2 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right]^2$$

9.2.1 הספקים במעגל בוליאני מבוסס SR

"מהפך" מבוסס מפסק (מודל SR), בעל עומס קיבולי, הממותג מחזורית בזמן מחזור T, כאשר T1 זמן סגירת המפסק.



איור 14 – "שער מהפך" בוליאני מבוסס מפסק במודל SR

בהנחה שזמני המיתוג ארוכים יחסית לקבועי הזמן ומקיימים:

$$T_1, T_2, T \gg \tau$$

מתקבל שההספק הממוצע הנצרך ע"י השער הממותג מחזורית:

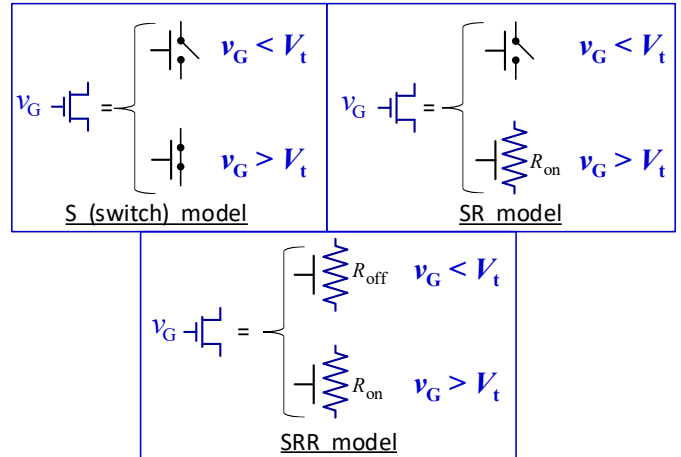
$$\langle P \rangle = \underbrace{\frac{V_S^2}{R_{on} + R_{PU}} \cdot \frac{T_1}{T}}_{static} + \underbrace{\frac{V_S^2 \cdot C}{T} \left(1 - \frac{R_{on}}{R_{PU} + R_{on}} \right)^2}_{dynamic}$$

9 מעגלים בוליאנים מבוססי מפסקים והספקי מיתוג ספרתיים

9.1 מודל למעגלי מיתוג ספרתיים

9.1.1 מודל מפסקים מבוקרים למימוש שערים

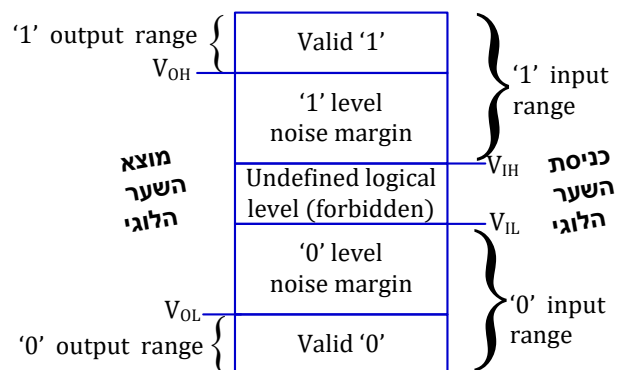
מודלים שונים עבור מפסקים מבוקרי מתח שער: V_t הוא מתח הסף עבור המתח המופעל ב V_G לשם סגירת המפסק



איור 11 – מודל S / SR / SRR לתיאור מפסק מבוקר

9.1.2 שולי רעש לאות גדול "בוליאני" בינארי

תחומי עבודה לאותות 'ספרתיים' במוצא ובכניסה ל "שער" לוגי:



איור 12 – מודל רמות מתח להגדרת תחומי עבודה עם ערכים "בוליאניים"

$$NM_0 = NM_{LOW} = V_{IL} - V_{OL} \quad \text{שולי רעש (Noise margin):}$$

$$NM_1 = NM_{HIGH} = V_{OH} - V_{IH}$$



$$10.2.3 \quad \text{ריסון קריטי: } \zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \omega_0^2$$

$$\lim_{\omega_d \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega_d \cdot t)}{\omega_d} = t \quad \text{תזכורת:}$$

פתרון:

$$y^{ZIR}(t) = [y_0 + (\omega_0 \cdot y_0 + y_1)t] \exp(-\omega_0 t) u(t)$$

$$10.2.4 \quad \text{ריסון יתר: } \zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} > 1 \Leftrightarrow \alpha^2 > \omega_0^2$$

פתרון:

$$y^{ZIR}(t) = \left[y_0 \cosh(\alpha_d t) + (\alpha y_0 + y_1) \frac{\sinh(\alpha_d t)}{\alpha_d} \right] e^{-\alpha t} u(t)$$

תזכורת (פונקציות היפרבוליות, ומעבר ל exp):

$$\frac{\sin(jx)}{j} = \sinh(x) \triangleq \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \sinh(0) = 0$$

$$\cos(jx) = \cosh(x) \triangleq \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \cosh(0) = 1$$

10.3 ZSR

צורה קנונית למציאת התגובה המאולצת למקורות, ת"ה אפס:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial t} y(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 \cdot x(t) \\ y(0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון המשוואה האי-הומוגנית, בתגובה לאילוצ המקורות ובהינתן תנאי התחלה אפס, כלומר רכיבים ריאקטיביים ללא אנרגיה אגורה התחלתית;

10.3.1 מציאת ZSR ע"י מציאת הפתרון הכללי:

הפתרון הכללי נגזר מידיעת הפתרון הפרטי (במקרים רבים זהו המצב המתמיד), וסיכום הפתרון הפרטי עם הפתרון ההומוגני:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$$y(t) = \left\{ y_p(t) + \left[A \cdot \cos(\omega_d t) + B \cdot \frac{\sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right] \cdot e^{-\alpha t} \right\} u(t)$$

עבור ZSR, נאלץ ת"ה אפס על המקדמים B, A:

$$y^{ZSR}(t=0^+) = 0$$

↓

$$y^{ZSR}(t) = \left\{ y_p(t) + \left[y_p(0) \cos(\omega_d t) + \left(\alpha y_p(0) + \frac{\partial y_p}{\partial t}(0) \right) \frac{\sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right] \times e^{-\alpha t} \right\} u(t)$$

10 תופעות מעבר זמניות במעגלים מסדר שני

10.1 המשוואה הקנונית

צורה קנונית:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial t} y(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 \cdot x(t) \\ y(0) = y_0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0) = y_1 \end{cases}$$

הערכים העצמיים של ה פ"א הם:

$$\zeta \triangleq \frac{\alpha}{\omega_0}$$

ניתן להגדיר גם מקדם ריסון:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\alpha/\omega_0)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{ואז:}$$

$$\zeta = \frac{1}{2Q_0} \quad \text{מתקיים הקשר הבא בין מקדם הריסון לגורם הטיב}$$

(Q_0 , הוא גורם הטיב המתקבל מניתוח פאזורי)

בהצבת הע"ע לפתרון, חשוב להבחין במעבר בין התחומים:

$$j\omega_d = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \{\alpha < \omega_0 \Leftrightarrow \zeta < 1\}$$

$$j\omega_d \triangleq \alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \{\omega_0 < \alpha \Leftrightarrow \zeta > 1\}$$

10.2 ZIR

צורה קנונית למציאת התגובה הטבעית לתנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial t} y(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0) = y_1 \end{cases}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית (ללא מקורות) בתגובה טבעית לתנאי

ההתחלה בלבד ← פתרון ZIR כללי:

$$y^{ZIR}(t) = \left[y_0 \cos(\omega_d t) + (\alpha y_0 + y_1) \frac{\sin(\omega_d t)}{\omega_d} \right] e^{-\alpha t} u(t)$$

$$10.2.1 \quad \text{ריסון חסר: } \zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 < \omega_0^2$$

הפתרון למקרה ריסון חסר זהה לפתרון הכללי.

$$10.2.2 \quad \text{ריסון אפס: } \zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 0$$

פתרון:

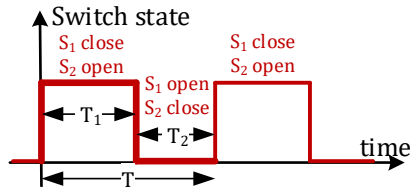
$$y^{ZIR}(t) = \left[y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{y_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] u(t)$$



ומתקיים: $\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

11 ממירי DC-to-DC מבוססי מעגלים מסדר שני

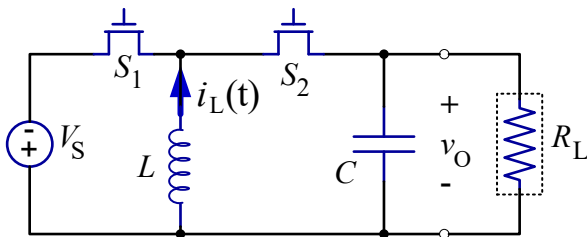
שני המפסקים נפתחים ונסגרים לסירוגין, כאשר: $T = T_1 + T_2$,
וזמן המחזור T, קטן בסדרי גודל, מכלל קבועי הזמן של המעגל.



איור 16 – משטר מיתוג המפסקים, של ממיר מתח, כנגד ציר הזמן

נגדיר מחזור-פעולה / Duty-Cycle: $D = \frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{T_1}{T}$

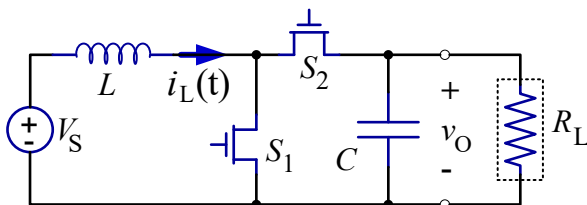
11.1 ממיר Buck-Boost



איור 17 – מבנה עקרוני של ממיר מתח מסוג Buck-Boost

מתח המוצא מקיים את הקשר: $V_{OUT} = V_S \cdot \frac{D}{1-D}$

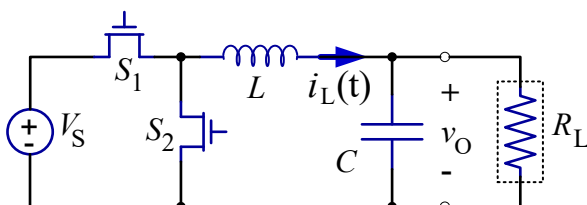
11.2 ממיר Boost



איור 18 – מבנה עקרוני של ממיר מתח מסוג Boost

מתח המוצא מקיים את הקשר: $V_{OUT} = V_S \cdot \frac{1}{1-D}$

11.3 ממיר Buck



איור 19 – מבנה עקרוני של ממיר מתח מסוג Buck

מתח המוצא מקיים את הקשר: $V_{OUT} = V_S \cdot D$

10.3.2 מקרה פרטי - תגובת ZSR לכניסת מדרגה:

התגובה הזמנית לכניסת מקור דמוי מדרגה מהצורה:

$$x(t) = Y_S \cdot u(t)$$

עבור כלל מקרה הריסון השונים היא:

$$y^{ZSR}(t) = \begin{cases} Y_S \cdot [1 - \cos(\omega_0 t)] \cdot u(t) & \zeta = 0 \\ Y_S \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \right\} \cdot u(t) & 0 < \zeta < 1 \\ Y_S [1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha \cdot t)] \cdot u(t) & \zeta = 1 \\ Y_S \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[\cosh(\alpha_d t) + \frac{\alpha}{\alpha_d} \sinh(\alpha_d t) \right] \right\} \cdot u(t) & \zeta > 1 \end{cases}$$

10.3.3 תגובת ZSR לכניסת הלם:

התגובה הזמנית לכניסת מקור הלם, מוכפלת במקדם, מהצורה:

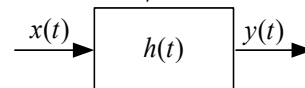
$$\omega_0^2 \cdot x(t) = \omega_0^2 \cdot \Lambda \cdot \delta(t - t_0)$$

מגדירה את התגובה להלם, מוכפלת במקדם, של מעגל מסדר שני:

$$y^{ZSR}(t) \triangleq \Lambda \cdot h(t - t_0) = \Lambda \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{\sin[\omega_d(t - t_0)]}{\omega_d} \cdot \exp[-\alpha(t - t_0)] \cdot u(t - t_0)$$

ומידיעת התגובה, ניתן למצוא ZSR לכניסה כלשהי, ע"י שימוש באינטגרל קונבולוציה.

10.4 התגובה להלם והקשר לתגובת ZSR כללית



איור 15 – מערכת LTI - מישור הזמן

נוכל להרחיב מה שראינו במערכות מסדר I וסדר II, לסדר כלשהו.

אם $h(t)$ היא התגובה במוצא לכניסת הלם של מערכת ה-LTI

אזי עבור כניסה (מקור) כלשהי, $x(t)$, התגובה הזמנית במוצא

המערכת בזמן t_1 היא:

$$y^{ZSR}(t_1) = \int_0^\infty x(t) \cdot h(t_1 - t) dt$$

10.5 תגובה כוללת

התגובה הכוללת: $y(t) = y^{ZSR}(t) + y^{ZIR}(t)$

10.6 מקרים פרטיים קונוניים

10.6.1 מקרה פרטי עקרוני – RLC טורי

במעגל RLC טורי (דוגמה באיור 21) פותרים את המד"ר עבור מתח

הקבל, ולכן: $v_C(0) = V_{C,0}$, $\frac{dv_C}{dt}(0) = \frac{I_{L,0}}{C}$

ומתקיים: $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

10.6.2 מקרה פרטי עקרוני – RLC מקבילי

במעגל RLC מקבילי (דוגמה באיור 20) פותרים את המד"ר עבור

זרם הסליל ולכן: $i_L(0) = I_L(0)$, $\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_C(0)}{L}$



12 מצב סינוסי מתמיד

12.1 פאזורים

הגדרת פאזור (בהינתן תדר ω מסוים יחיד) :

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) \xRightarrow{\text{Phasor}} A(\omega) = A_m \exp(j\phi)$$

$$\Rightarrow a(t) = \Re_e \{ A(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \}$$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \cdot j\omega \quad \text{אופרטור הגזירה ע"פ הזמן:}$$

$$\int dt \Rightarrow \cdot \frac{1}{j\omega} \quad \text{אופרטור האינטגרל ע"פ הזמן:}$$

זהויות עזר טריגונומטריות:

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos\left[\omega t - \text{atan}\left(\frac{B}{A}\right)\right]$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$Z = \frac{V}{\tilde{I}} = \frac{|V| \cdot e^{j\phi_V}}{|\tilde{I}| \cdot e^{j\phi_I}} = \frac{|V|}{|\tilde{I}|} \cdot \exp[j(\phi_V - \phi_I)] [\Omega] \quad \text{אימפדנס:}$$

$$Y \triangleq \frac{\tilde{I}}{V} = \frac{1}{Z} = \frac{|\tilde{I}|}{|V|} \cdot \exp[-j(\phi_V - \phi_I)] [S] \quad \text{אדמיטנס:}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot \exp\left(-j \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{אימפדנס קבל:}$$

$$Z_L = j\omega L = \omega L \cdot \exp\left(+j \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{אימפדנס של סליל:}$$

12.2 הספק ואנרגיה במשטר פאזורי

$$S = \frac{1}{2} V \tilde{I}^* = \frac{1}{2} |V| e^{j\phi_V} |\tilde{I}| e^{-j\phi_I} = P + jQ \quad \text{הספק מרוכב:}$$

הספק ממשי:

$$P = P_{av} = \langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ V \tilde{I}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ Z \} |\tilde{I}|^2 = \frac{1}{2} \text{Re} \{ Y^* \} |V|^2 = \frac{1}{2} |V| |\tilde{I}| \cos(\phi_V - \phi_I)$$

הספק עיוור:

$$Q = Q_{av} = \langle Q \rangle = \frac{1}{2} \text{Im} \{ V \tilde{I}^* \} = \frac{1}{2} \text{Im} \{ Z \} |\tilde{I}|^2 = \frac{1}{2} \text{Im} \{ Y^* \} |V|^2 = \frac{1}{2} |V| |\tilde{I}| \sin(\phi_V - \phi_I)$$

$$pf = \frac{P}{|S|} = \cos(\phi_V - \phi_I) \quad \text{Power Factor, מקדם ההספק:}$$

$$W_{C,av} = \langle W_C \rangle = \langle W_E \rangle = \frac{1}{4} C |V_C|^2 \quad \text{אנרגיה ממוצעת בקבל:}$$

$$W_{L,av} = \langle W_L \rangle = \langle W_M \rangle = \frac{1}{4} L |\tilde{I}_L|^2 \quad \text{אנרגיה ממוצעת בסליל:}$$

12.2.1 תיאום להעברת הספק מקסימלי

בהינתן מקור, $\tilde{V}_s$, הכולל אימפדנס פנימי: $Z_S = R_S + j\chi_S$
ניתן לצרוד הספק מקסימלי אם העומס המחובר למקור מקיים:

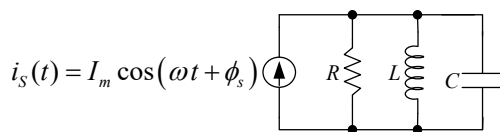
$$R_L + j\chi_L = Z_L = Z_S^* = R_S - j\chi_S$$

ובמקרה זה, שבו $Z_L = Z_S^*$, ההספק המתפתח על העומס יקיים:

$$\langle P_{R_L} \rangle = \frac{1}{4} \cdot \frac{\langle v_s(t)^2 \rangle}{R_L} = \frac{1}{4} \cdot \frac{|V_S|^2}{2 R_L} = \frac{|V_S|^2}{8 R_L}$$

12.3 תהודה

12.3.1 תהודה מקבילית



איור 20 – מעגל תהודה מקבילי

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{תדר התהודה:}$$

אנרגיה אגורה בקבל בתדירות התהודה:

$$W_E(t) = W_C(t) = \frac{1}{2} R^2 C I_m^2 \cos^2(\omega_o t + \phi_s)$$

אנרגיה אגורה בסליל בתדירות התהודה:

$$W_M(t) = W_L(t) = \frac{1}{2} R^2 C I_m^2 \sin^2(\omega_o t + \phi_s)$$

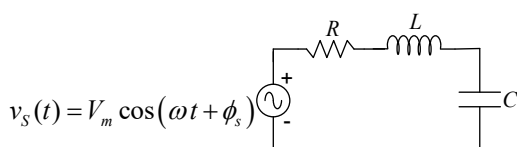
גורם הטיב בתהודה מקבילית:

$$Q_o \triangleq 2\pi \frac{\langle W_E + W_M \rangle}{\langle W_{diss} \rangle_{\text{along T}}} = \omega_o RC = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

זרם הקבל והסליל והיחס בינם לבין זרם הנגד בתהודה:
(תהודות זרמים)

$$\tilde{I}_C(\omega_o) = -\tilde{I}_L(\omega_o) = j Q_o \tilde{I}_R = j Q_o \tilde{I}_S$$

12.3.2 תהודה טורית



איור 21 – מעגל תהודה טורי

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{תדר תהודה:}$$

$$Q_o = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{גורם הטיב:}$$

מתח הקבל והסליל, והקשר למתח הסליל הנגד: (תהודות מתחים)

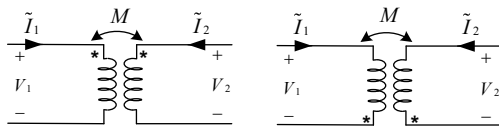
$$V_L(\omega_o) = -V_C(\omega_o) = j Q_o V_R = j Q_o V_S$$



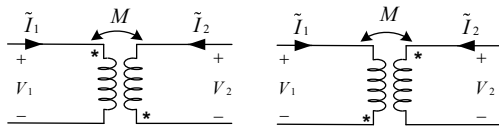
13 אלמנטי צימוד

13.1 צימוד השראותי

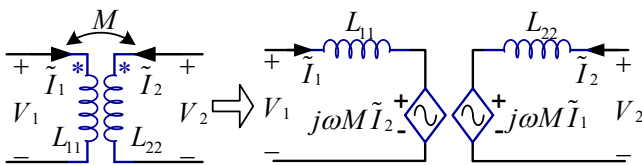
13.1.1 צמד סלילים מצומדים - כללי



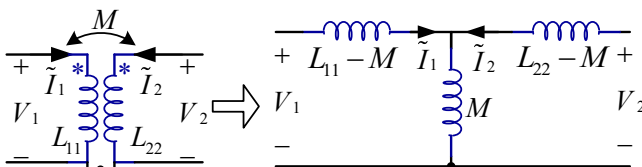
איור 24 – צמד סלילים מצומדים ; שטפים מסתכמים



איור 25 – צמד סלילים מצומדים ; שטפים מתחסרים



איור 26 – צמד סלילים מצומדים ; מעגל ייחוס ומעגל תמורה



איור 27 – צמד סלילים מצומדים ; מעגל תמורה, במקרה של צומת משותף

משוואות ייחוס (מתייחסות למעגל הנ"ל):

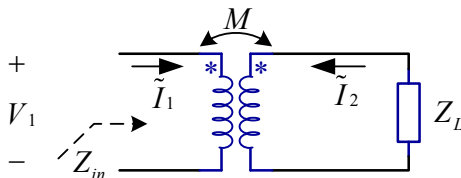
$$V_1 = j\omega L_{11} \tilde{I}_1 + j\omega M \tilde{I}_2$$

$$V_2 = j\omega L_{22} \tilde{I}_2 + j\omega M \tilde{I}_1$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} \quad -1 \leq k \leq 1$$

מקדם הצימוד: $-1 \leq k \leq 1$

13.1.2 צמד סלילים מצומדים כ"שנאי ליניארי"



איור 28 – שיקוף אימפדאנסים

$$Z_{in} \triangleq \frac{V_1}{\tilde{I}_1} = j\omega L_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_{22}}$$

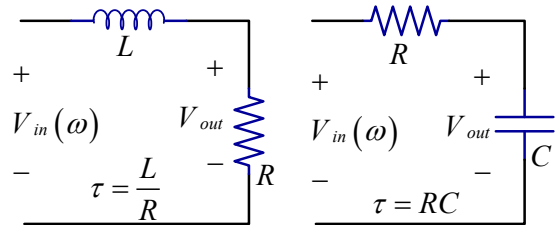
אימפדאנס משוקף:

12.4 מעגלים מסנני תדרים

ביטוי לתגובת התדר של פונקציית ההתמסורת כהגבר ביח' דציבלים:

$$[dB] \triangleq 10 \log_{10} \left(\frac{P_{out}}{P_{in}} \right) = 20 \log_{10} \left(\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| \right) = 20 \log_{10} (|H(\omega)|)$$

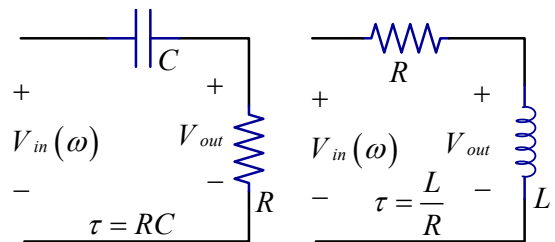
12.4.1 מסנן מעביר (תדרים) נמוכים - LPF



איור 22 – מסנן LPF

$$H(\omega) = \frac{\tilde{V}_{out}(\omega)}{\tilde{V}_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

12.4.2 מסנן מעביר (תדרים) גבוהים - HPF



איור 23 – מסנן HPF

$$H(\omega) = \frac{\tilde{V}_{out}(\omega)}{\tilde{V}_{in}(\omega)} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

12.4.3 מעביר פס - BPF (על בסיס מעגל תהודה)

לדוגמה, על בסיס מעגל התהודה

$$H(\omega) = \frac{V_R}{V_S}(\omega)$$

באיור 21, כאשר:

מתקבל באופן קונוי הביטוי למסנן BPF מסדר שני:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jQ_o \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)}$$

12.4.4 רוחב סרט (המסנן BPF מסדר שני הנ"ל)

$$\omega_{2,1} = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \cdot Q_o} \right)^2} \pm \frac{\omega_o}{2 \cdot Q_o}$$

תדרי מחצית ההספק:

רוחב סרט:

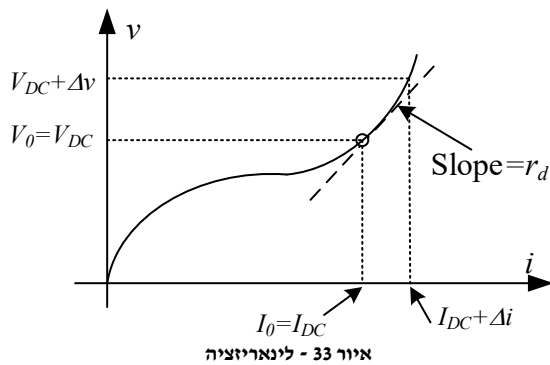
$$BW = \Delta f = \frac{f_o}{Q_o} = \frac{\omega_o}{2\pi Q_o} [Hz], \quad \Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q_o} \left[\frac{rad}{sec} \right]$$



14 רשתות הכוללות רכיבים לא-ליניאריים

14.1 לינאריזציה עבור שינויים קטנים

בענף בו קיים קשר לא-לינארי בין מתח לזרם : $v = f_{NL}(i)$



נבצע לינאריזציה, כלומר קירוב מסדר ראשון :

$$v(i) = f_{NL}(I_{DC}) + \left. \frac{\partial f_{NL}(i)}{\partial i} \right|_{I=I_{DC}} \cdot (i - I_{DC})$$

$$v(i) = V_{DC} + \Delta v \approx V_{DC} + r_d \cdot \Delta i$$

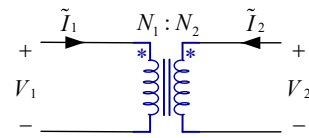
כאשר ההתנגדות לאות קטן מוגדרת כ :

$$r_d \triangleq \left. \frac{\partial v(i)}{\partial i} \right|_{I=I_{DC}} = \left. \frac{\partial f_{NL}(i)}{\partial i} \right|_{I=I_{DC}}$$

או לחילופין :

$$\frac{1}{r_d} = g_d \triangleq \left. \frac{\partial i(v)}{\partial v} \right|_{v=V_{DC}} = \left. \frac{\partial y_{NL}(v)}{\partial v} \right|_{v=V_{DC}}$$

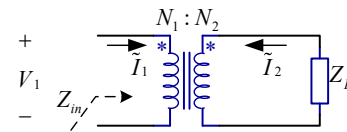
13.1.3 שנאי אידיאלי



איור 29 – שנאי אידיאלי

$$\text{יחס מתחים: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{יחס זרמים: } \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{שימור הספק: } v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

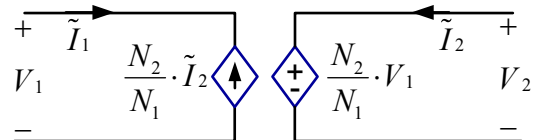


איור 30 – המרת אימפדאנסים בשנאי אידיאלי

המרת אימפדנסים בשנאי אידיאלי :

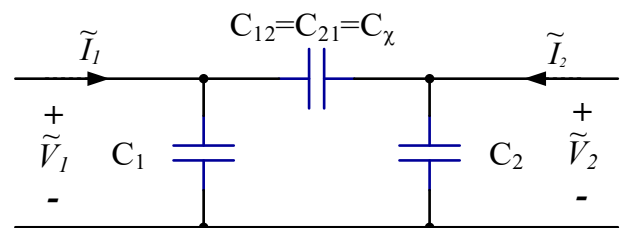
$$Z_{in} \triangleq \frac{V_1}{\tilde{I}_1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot Z_L$$

מעגל תמורה לשנאי אידיאלי :



איור 31 – מעגל תמורה עבור שנאי אידיאלי

13.2 צימוד קיבולי



איור 32 – צימוד קיבולי

משוואות סטטיות :

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 + (V_1 - V_2)C_{12} = (C_1 + C_{12})V_1 - C_{12}V_2$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 + (V_2 - V_1)C_{21} = -C_{21}V_1 + (C_2 + C_{21})V_2$$

$$C_{12} = C_{21} \triangleq C_X \quad \text{כאשר :}$$

המשוואות עבור עירור פאזורי :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} C_{11} & -C_X \\ -C_X & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{as} \quad \begin{matrix} C_{11} = C_1 + C_X \\ C_{22} = C_2 + C_X \end{matrix}$$