

ביה"ס למדעי הים

מבחן במתמטיקה (מכינה תשפ"ג), מועד ב'

שם המרצה: ד"ר נלי ברט

תאריך: 27.9.2023

חומר עזר: מחשבון לא מתוכנת ולא גרפי.

משך המבחן 2.5 שעות

* ערכו את תשובותיכם באופן מלא ומנומק. חוסר פירוט עלול לפגוע בציון שתקבלו.

* התחל כל שאלה בעמוד חדש.

חומר עזר: מחשבון לא מתוכנת ולא גרפי.

משך המבחן 2.5 שעות

ערכו את תשובותיכם באופן מלא ומנומק. חוסר פירוט עלול לפגוע בציון.

התחילו כל שאלה בעמוד חדש.

* אין קשר בין הסעיפים.

חלק א (60 נקודות)

ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות (לכל שאלה 20 נקודות)

שאלה 1

פשטו את התבנית הבאה: (יש להראות דרך מלאה, אין צורך לעשות ת.ה):

$$א. \left(\frac{x-1}{x^2-3x-10} \right)^{-2} : \left(\frac{x^2+4x-5}{x^2-25} \right)^1 =$$

פתרו את המשוואה הבאה (ללא מחשבון):

$$ב. \log_3(3x^2) = 3(\log_3 x)^2$$

שאלה 2 (יש להראות דרך מלאה)

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2} + 2\sqrt{\frac{81-x^2}{x-2}} - \frac{2}{(-x^2+3x+4)}$$

ב. פתרו את המשוואה הבאה: $3^{x-1} + 3^x - 2^{x+3} = -2^x - 2^{x-2}$

שאלה 3 (יש להראות דרך מלאה)

פתרו את אי השוויונים הבאים:

א. $1 < |2x - 5| \leq 3$

ב. $2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

שאלה 4 (יש להראות דרך מלאה)

א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 - 4x + 5$.

מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נק' חיתוך של הפונקציה עם הצירים. (3) שרטטו את הפונקציה (4) תחומי חיוביות ושליליות. (5) תחומי עליה וירידה. (6) משוואת המשיק לפונקציה בנקודה $x=5$.

ב. נתונה הפונקציה:
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 5, & x < 0 \\ 2x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. שרטט את הפונקציה

2. מצא תחומי עליה וירידה

חלק ב (40 נקודות)

ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות (לכל שאלה 20 נקודות)

שאלה 5 (יש להראות דרך מלאה)

א. נתונה הפונקציה: $y = \frac{\ln(x)}{x^2}$

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את משוואת הישר המשיק לפונקציה הנתונה בנקודה $x = e$.

3. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה? האם יש לה נקודות קיצון? אם כן, מה הן?

ב. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה $y = (x + 4)^2$, ציר ה-x וציר ה-y.

שאלה 6 (יש להראות דרך מלאה)

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{x^2 - k}{x + 2}$. ידוע שעובר משיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$. משיק זה מקביל לישר $y=x-10$.

א. מצאו את הפרמטר k והציבו אותו בפונקציה.

ב. מצאו את משוואת המשיק.

ג. האם לפונקציה קיימות נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן, אם לא, נמק למה אין.

ד. קבעו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

שאלה 7

נתונה הפונקציה: $y = \frac{3x^2}{(x-1)^2}$. בצעו חקירה בהתאם לשלבים הבאים:

-תחום הגדרה

-נקודות חיתוך עם הצירים

-נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה

-נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות

-אסימפטוטות

-שרטוט

- עבור אילו ערכי m הישר $y=m$ חותך את גרף הפונק' פעם אחת ומעלה?

בהצלחה רבה.

27.9.23

7) 10N - 1/2 3/4 IN 10/20

$$1, \text{ i.e. } \left(\frac{x-1}{x^2-3x-10} \right)^{-2} : \left(\frac{x^2+4x-5}{x^2-25} \right)^1 =$$

$$\frac{(x-5)^2(x+2)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)(x-1)} =$$

$$\frac{(x-5)^3(x+2)^2}{(x-1)^3}$$

$$\text{7. } \log_3(3x^2) = 3(\log_3 x)^2$$

 $x > 0$: 7.7

$$\log_3 3 + \log_3 x^2 = 3(\log_3 x)^2$$

$$1 + 2\log_3 x = 3(\log_3 x)^2$$

$$\boxed{\log_3 x = t}$$

$$1 + 2t = 3t^2$$

$$-3t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-6} = \frac{-2 \pm 4}{-6} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \rightarrow -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\log_3 x = 1$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\log_3 x = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{x = 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$$

$$2, ic. f(x) = \sqrt[3]{x-2} + 2 \sqrt{\frac{81-x^2}{x-2}} - \frac{2}{-x^2+3x+4}$$

Def

$$\frac{81-x^2}{x-2} \geq 0$$

(PZ)

$$-x^2+3x+4 \neq 0$$

$$\frac{(9-x)(9+x)}{x-2} \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2}$$

	-9	2	9	
$(9-x)(9+x)$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$\frac{(9-x)(9+x)}{x-2}$	+	-	+	+

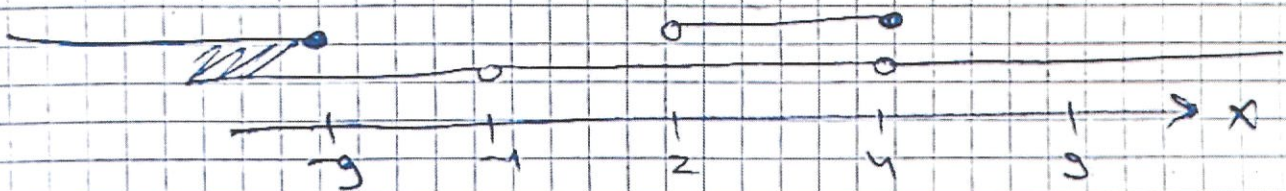
$$\frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

$$\frac{-3 \pm 5}{-2} = \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$$

$$x \leq -9, 2 < x \leq 9$$

(PZ)

$$x \neq -1, 4$$



$$x \leq -9, 2 < x < 4$$

$$2, \text{c.} \quad 3^{x-1} + 3^x - 2^{x+3} = -2^x - 2^{x-2}$$

x 6: 12, 12

$$3^x \cdot \frac{1}{3} + 3^x - 2^x \cdot 8 = -2^x - 2^x \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{3} \cdot 3^x = 6\frac{3}{4} \cdot 2^x$$

$$\frac{4}{3} \cdot 3^x = \frac{27}{4} \cdot 2^x$$

$$\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\boxed{x=4}$$

$$3, \text{c.} \quad 1 < |2x-5| \leq 3$$

$$1 < |2x-5| \quad \text{or} \quad |2x-5| \leq 3$$

$$2x-5 < -1 \quad \text{or} \quad 2x-5 > 1 \quad -3 \leq 2x-5 \leq 3$$

$$2x < 4$$

$$2x > 6$$

$$x < 2$$

$$\text{or}$$

$$x > 3$$

$$-3 \leq 2x-5$$

$$\text{or}$$

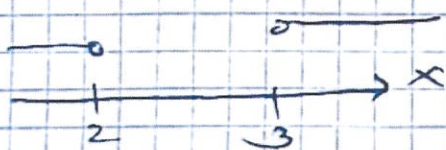
$$2x-5 \leq 3$$

$$2 \leq 2x$$

$$2x \leq 8$$

$$x \geq 1$$

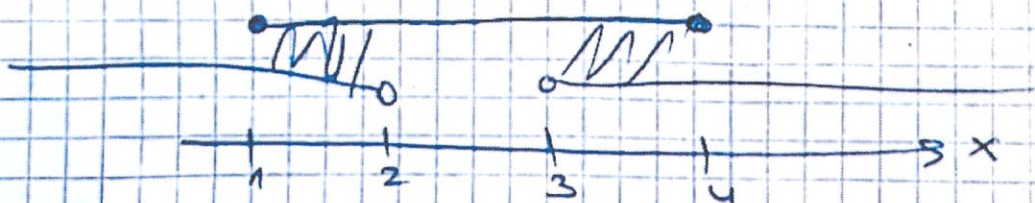
$$x \leq 4$$



$$\boxed{x < 2 \quad \text{or} \quad x > 3}$$

$$\text{or}$$

$$\boxed{1 \leq x \leq 4}$$



$$\boxed{1 \leq x < 2}$$

$$\boxed{3 < x \leq 4}$$

$$3, \approx. \quad 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) \leq -2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{x-4}\right) \leq -2$$

$$\frac{x+1}{x-4} \geq 4$$

$$\frac{x+1}{x-4} - 4 \geq 0$$

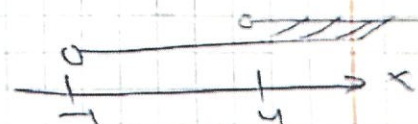
$$\frac{x+1-4(x-4)}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{-3x+17}{x-4} \geq 0$$

	4	$\frac{17}{3}$	
$-3x+17$	+	+	-
$x-4$	-	+	+
$\frac{0}{N}$	-	+	-

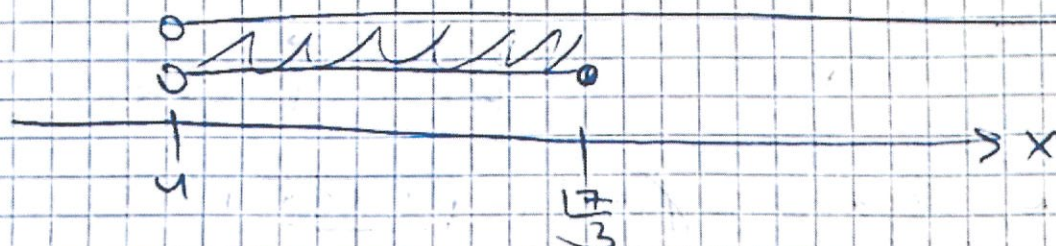
$$4 < x \leq \frac{17}{3}$$

$x-4 > 0 \quad (x-1) \quad x+1 > 0$
 $x > 4 \quad \quad \quad x > -1$



$$x > 4$$

PT



$$4 < x \leq \frac{17}{3}$$

1-4, 6.

$$y = -x^2 - 4x + 5$$

תחום: $x \in \mathbb{R}$

$$-x^2 - 4x + 5 = 0$$

חיתוך עם ציר ה-x:

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2}$$

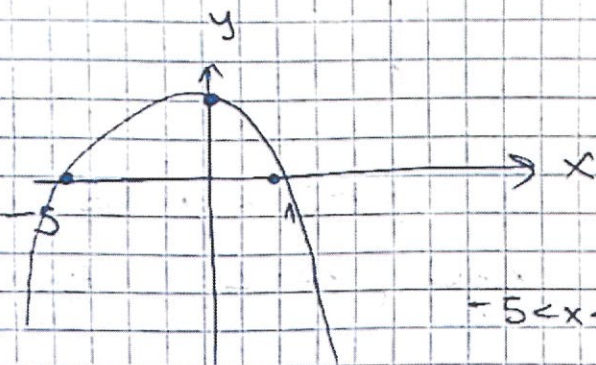
$$\frac{4 \pm 6}{-2} = \begin{matrix} \nearrow -5 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$(-5, 0)$ $(1, 0)$

$(0, 5)$

חיתוך עם ציר ה-y:

גובה:



$$-5 < x < 1$$

תחום חיובי:

$$x < -5, x > 1$$

תחום שלילי:

השאלה למצוא תחום קטנה ביותר של x שבה $y \geq 0$:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x < -2$$

תחום קטנה:

$$x > -2$$

תחום ירידה:

$$y(5) = -5^2 - 20 + 5 = -40$$

$$y' = -2x - 4$$

$$y'(5) = -10 - 4 = -14$$

$(5, -40)$
נקודה

משפט:

$$m = -14$$

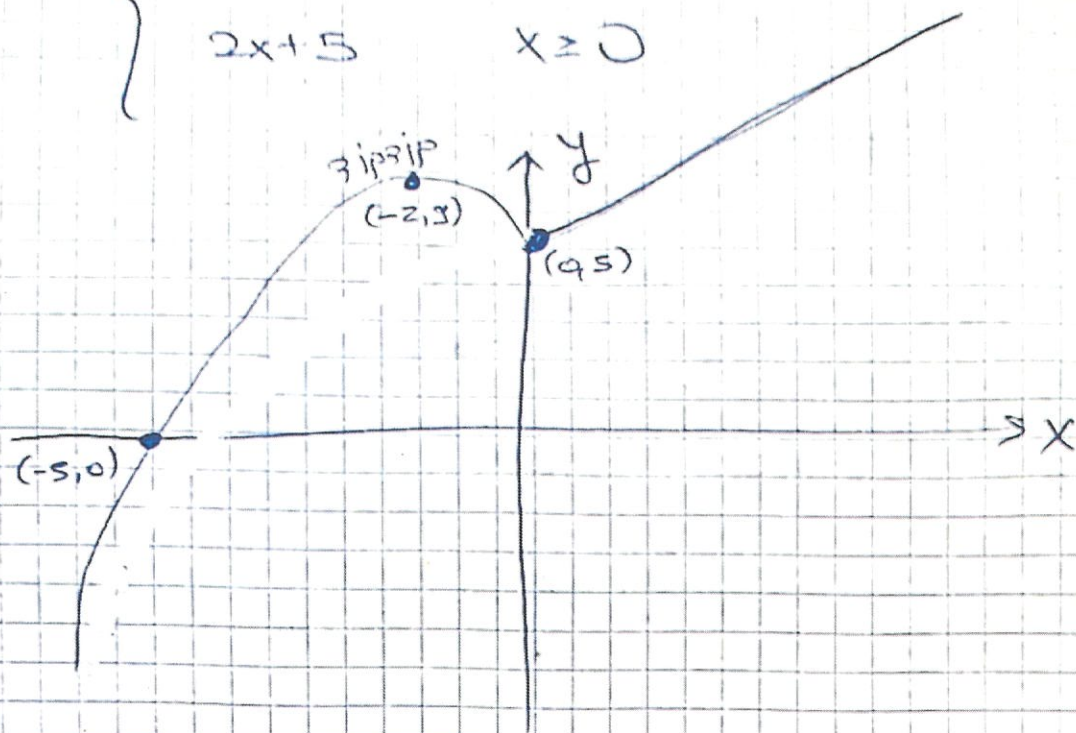
$$y + 40 = -14(x - 5)$$

$$y = -14x + 30$$

משפט

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 5 & x < 0 \\ 2x + 5 & x \geq 0 \end{cases}$$

5, 1



הפונקציה
 $x > 0$, $x < -2$: פונקציה ליניארית

5, 1, 1. $y = \frac{\ln(x)}{x^2}$

$x^2 \neq 0$ $x \neq 0$ $x > 0$ $x > 0$

$x > 0$: נדרש

5, 1, 2. $y(e) = \frac{\ln e}{e^2} = \frac{1}{e^2}$ $(e, \frac{1}{e^2})$ נקודת פיתול

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$y'(e) = \frac{1 - 2 \ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3}$: נקודת פיתול

$$y - \frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2} (x - e)$$

תוצאה - known

$$y - \frac{1}{e^2} = -\frac{x}{e^3} + \frac{1}{e^2}$$

$$\boxed{y = -\frac{x}{e^3} + \frac{2}{e^2}}$$

5, 10, 3.

$$y' = 0$$

$$\frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \quad / x^3$$

$$1 - 2 \ln x = 0$$

$$\frac{1}{2} = \ln x$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$y(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$(\sqrt{e}, \frac{1}{2e})$$

נקודת מקסימום

x	0	$0 < x < \sqrt{e}$	$\sqrt{e}$	$x > \sqrt{e}$
y'	+	+	0	-
y	↗	↗	$\frac{1}{2e}$	↘

הנקודה המקסימלית היא
! max

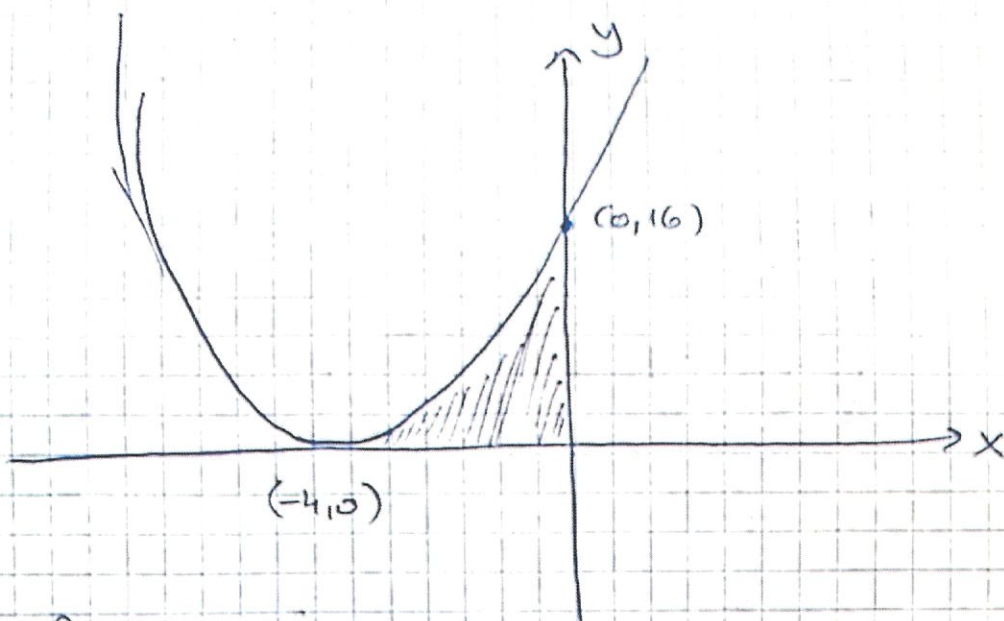
$$0 < x < \sqrt{e}$$

$$x > \sqrt{e}$$

היא מקסימום

היא מינימום

5, 8.



$$S = \int_{-4}^0 (x+4)^2 dx = \int_{-4}^0 x^2 + 8x + 16 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + 16x \Big|_{-4}^0 =$$

$$0 - \left(\frac{(-4)^3}{3} + 4 \cdot (-4)^2 + 16 \cdot (-4) \right) = 0 + 21\frac{1}{3} - 64 + 64 =$$

$21\frac{1}{3}$

6. k. $g(x) = \frac{x^2 - k}{x+2}$

$$g'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - k) \cdot 1}{(x+2)^2} = 1$$

$$\boxed{g'(1) = 1}$$

$$\frac{2 \cdot 3 - (1 - k)}{3^2} = 1$$

$$\frac{6 - 1 + k}{9} = 1$$

$$5 + k = 9$$

$$\boxed{k = 4}$$

7. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x+2}$

$$\boxed{x \neq -2} \quad \text{יד.פ.}$$

$$g'(1) = \frac{1^2 - 4}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$(1, -1)$$

נקתן פ'

$$y+1 = 1(x-1)$$

$$\boxed{y = x-2}$$

$$m=1$$

ישר
פרט

פרט נדרש

8. $g'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 4) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 4}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)^2}$

$$\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2}$$

$$\neq 1$$

המשוואה לא מתקיימת

לכן אין נקודה

9.

הפונקציה היא פרטית לזו של קודם.

$$7. \quad y = \frac{3x^2}{(x-1)^2} \quad x \neq 1 \quad \text{פ.ד.}$$

$(0,0)$ חומר לבדיקה

$(0,0)$ חומר לבדיקה

פ' נגזרת

$$y' = \frac{6x(x-1)^2 - 3x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{6x(x-1)^2 - 6x^2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{6x(x-1)[(x-1) - x]}{(x-1)^4} = \frac{-6x}{(x-1)^3} = 0$$

$$x=0$$

$$y(0) = 0$$

$(0,0)$

פ' נגזרת

x	x < 0	0	0 < x < 1	1	x > 1
y'	-	0	+	+	-
y	↘	↗	↗	↘	↘

$(0,0)$
min

$$0 < x < 1$$

תחום עלייה

$$x < 0, x > 1$$

תחום ירידה

$$y' = \frac{-6x(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-6x^2 + 6x}{(x-1)^4}$$

פונקציה ראשונית

$$y'' = \frac{(-12x+6)(x-1)^4 - 4(x-1)^3(-6x^2+6x)}{(x-1)^8} =$$

$$\cancel{(x-1)^3} \frac{[(-12x+6)(x-1) - 4(-6x^2+6x)]}{(x-1)^{8-3}} =$$

$$\frac{-12x^2 + 12x + 6x - 6 + 24x^2 - 24x}{(x-1)^5} =$$

$$\frac{12x^2 - 6x - 6}{(x-1)^5} = 0$$

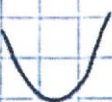
$$12x^2 - 6x - 6 = 0 \quad / : 6$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{! נקודות}$$

$$y(-\frac{1}{2}) = \frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{(-\frac{3}{2})^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}$$

נקודה קיצונית
פונקציה

x	x < -1/2	-1/2	-1/2 < x < 1	x > 1
y''	-	0	+	+
y		1/3		

פונקציה קיצונית היא נקודה קיצונית

$$x \neq 1, x > -\frac{1}{2}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

פונקציה קיצונית

פונקציה קיצונית

אסימפלסטה אנכור:

ה'תשס"ח

